

Nemegyensúlyi termomechanika

Ván Péter

MTA Wigner FK RMI,
BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék,
Montavid Termodinamikai Kutatócsoport

2013. október

Ajánlás: Édesanyámnak és Édesapámnak.

Tartalomjegyzék

Előszó	v
1. Homogén testek – közönséges termodinamika	1
1.1. Bevezetés - történeti megjegyzések	1
1.2. Termosztatika, mechanika és termodinamika	2
1.3. Közönséges termodinamika - homogén gázok és folyadékok I.	3
1.3.1. Termosztatika	3
1.3.2. Termodinamika	6
1.4. Kiterjesztett közönséges termodinamika – homogén gázok és folyadékok II.	10
1.4.1. Példa: folyamatok Van der Waals-gázzal	12
1.4.2. Teljes és belső energia	13
1.5. Rugalmas anyag	14
1.5.1. Termodinamika	16
1.5.2. Lineárisan hőtáguló homogén rugalmas viszkoelasztikus test . .	17
1.6. Összefoglalás	18
2. Kontinuum-termodinamika	21
2.1. Bevezetés – történeti megjegyzések	21
2.1.1. Alapelvek	21
2.1.2. Gyökerek és irányzatok: klasszikus, racionális és kiterjesztett .	22
2.2. Objektivitás	24
2.2.1. Történet: objektivitás és anyagi objektivitás	24
2.2.2. A Noll-féle definíció kritikája	26
2.3. Gyenge nemlokalitás időben és térben	28
2.3.1. Történet: túl a lokális egyensúlyon	28
2.3.2. Gyengén nemlokális nemrelativisztikus kontinuumok	30
2.4. Gyengén nemlokális belső változók	32
2.4.1. Elsőrendű gyenge nemlokalitás – relaxáció	33
2.4.2. Másodrendű gyenge nemlokalitás - a Ginzburg–Landau-egyenlet	35
2.5. Duális belső változók és Hamilton-formalizmus	37
2.6. Gyengén nemlokális extenzívek – klasszikus irreverzibilis termodinamika	43
2.7. Egykomponensű folyadékok - másodrendű nemlokalitás a sűrűségben .	46
2.7.1. Folyadékmechanika általában	46
2.7.2. Termodinamikai elemzés	47
2.7.3. Lokális és gyengén nemlokális egyensúly	50
2.7.4. Schrödinger–Madelung-folyadék	52
2.7.5. Összefoglalás	53

2.8. Homogén és kontinuum	54
2.8.1. Generikus stabilitás	54
2.8.2. Kontinuum és homogén	58
2.9. Relokalizálható kontinuumok – hővezetés	60
2.9.1. Bevezetés – történeti megjegyzések	60
2.9.2. Az entrópiaprodukció	62
2.9.3. Lineáris vezetési törvények	63
2.9.4. Speciális esetek	64
2.9.5. Makroszkopikus univerzalitás	65
2.9.6. Megoldások	67
2.10. Rugalmasság és reológia	73
3. Relativisztikus hidro- és termodinamika	79
3.1. Bevezetés – történeti megjegyzések a hidrodinamikáról	79
3.2. Az Eckart-elmélet	82
3.3. Termodinamikai elemzés	84
3.4. Kinetikus elmélet	88
3.5. Generikus stabilitás	92
3.5.1. Homogén egyensúly	92
3.5.2. Linearizálás	93
3.6. Homogenizálás – termodinamika	96
4. Összefoglalás	99
A. Objektivitás és téridő	101
A.1. Nemrelativisztikus téridő	101
A.1.1. Anyagi sokaságok	104
A.2. Anyagi mennyiségek és anyagi deriváltak	109
B. Farkas lemmája és következményei	117
C. Reynolds transzporttétele	121
D. A mozgó testek hőmérséklete	123
D.1. Történet – relativisztikus termodinamika	123
D.2. Kölcsönható termodinamikai testek	127

Előszó

A termodinamika a fizika egyik legalkalmazhatóbb elmélete. Az emberiség előtt álló legnagyobb kihívások, az energiafelhasználás és elosztás kérdései és főképpen ezekhez a folyamatokhoz kapcsolódó veszteségek, azaz az entrópiatermelés csökkentése: termodinamikai kérdések. De az energiaváltozások és energiatranszport kérdésein messze túlmutatnak a termodinamika különböző alkalmazásai. Azért alkalmazható, mert a makroszkópikus kontinuumok keretrendszereként egységbe foglalja a többi diszciplínákat és összehangoltan kezelhetővé teszi kapcsolataikat, egyúttal pedig általános korlátokat és feltételeket szab az anyag tulajdonságait kifejező makroszkópikus összefüggésekre, a *konstitutív relációkra*. A nemegyensúlyi termodinamika a transzportjelenségek általános fenomenologikus elmélete.

Ugyanakkor néha teljesen meglepő és mély eredményeket kapunk termodinamikai megfontolások segítségével, amelyek messze kívül esnek az elmélet általánosan elfogadottnak tekintett érvényességi határain. Planck termodinamikai megfontolások alapján jutott a kvantummechanika kapujába, vagy említhetjük Jacobson és Verlinde eredményeit a közelmúltból, a gravitációelmélet és a termodinamika közötti kapcsolatról [136, 327].

Ez a kettősség, hogy a termodinamika valahogy egyszerre gyakorlati és alapvető, furcsa és zavaró tulajdonsága ennek a területnek. Egyfajta magyarázatot jelenthet, hogy tudjuk, a természetben minden folyamat irreverzibilis és a termodinamika a valódi világ, a nem tökéletes világ azon elmélete, amely pontosan a tökéletlenséget, egy nagyon általános tulajdonságot jellemez és modellez, ezért mindaz, ami speciálisan termodinamikai: univerzális. Univerzális abban az értelemben, hogy független az egyes részdiszciplínáktól, az anyag szerkezetére vonatkozó különböző konkrét speciális feltevésektől. Pontosán annyira univerzális, amennyire általánosak az elvek, amikre épít. Ez a fajta univerzalitás részletesen ki van fejtve az abszolút hőmérséklet esetén, de például a nemegyensúlyi termodinamika részben másfajta univerzalitását már sokkal kevésbé értjük. E dolgozatban ismertetett kutatásokat végső soron ennek, a második főtételben gyökerező univerzalitásnak a megértése motiválta.

Amikor az 1940-es évek végén a nemegyensúlyi termodinamika Eckart, Prigogine és Meixner munkássága révén kontinuumelméletként kiterjesztette Onsager korábbi, homogén termodinamikai megfontolásait, akkor kutatói mélyen hittek az elmélet fizikai diszciplínákat áthidaló, egyesítő erejében. A klasszikus irreverzibilis termodinamika korlátai azonban hamarosan világossá váltak, és a kezdeti lelkesedés csillapodásával manapság a fizikus közösség általában azt hiszi, hogy fejlődése megállt de Groot és Mazur 1962-ben kiadott monográfiájában rögzített szinten. Ennek az egyik oka – a divatok váltakozásán túl – véleményem szerint az alapelvek elégtelen megértettségében rejlik. A három terület, ahol a nemegyensúlyi termodinamika alapjainak vizsgálatára szükség van:

¹ MTA Doktori értekezés tervezete

- A második főtétel fizikai jelentése és annak formális megfogalmazása – ez már a homogén testek klasszikus elméletében is fontos.
- A konstitutív elmélet, azaz a második főtétel egyenlőtlenségének megoldási módszerei (a lineáris erő-áram szerkezet feltételei és meghaladása).
- Az objektivitás, azaz annak fizikai megértése és formális megfogalmazása, hogy a konstitutív, anyagra jellemző tulajdonságok valóban csak az anyagtól függenek.

A továbbiakban ezeket a kérdéseket vizsgáljuk a termodinamika három diszciplináját tekintve, egységes alapokat és módszereket használva. Fejezetei ennek megfelelően tagolódnak: a homogén testek, a nemrelativisztikus kontinuumok és a speciális relativisztikus folyadékok elméletét tárgyalom.

Homogén és kontinuum

A homogén testek termodinamikája magában foglalja a klasszikus termodinamikát, amit termosztatika vagy egyensúlyi termodinamika néven is ismerünk. A klasszikus termodinamika a nemegyensúlyi termodinamika része. Ez kétféle módon is igazolható. Egyrészt önmagában, mert a teljes klasszikus termodinamika felépíthető időbeli folyamatokkal, közönséges differenciálegyenletekre alapozottan, másrészt pedig a megfelelő kontinuumelmélet homogenizálásával, a térbeli rész kiátlagolásával.

Az első fejezet a közönséges termodinamikát, azaz a homogén testek nemegyensúlyi termodinamikáját tárgyalja két fontos részt kiemelve, amelyek jól megvilágíthatóak már ilyen modellben is.

1. Megfogalmazásra kerül a második főtétel, mint az anyag stabilitásának törvénye (az 1.1. tétel és változatai az 1.4 és az 1.5 fejezetekben).
2. A mechanika és a termodinamika kapcsolata, különös tekintettel arra, hogy olyan fogalmak, mint tehetetlenség, sebesség, hogyan egyeztethetőek össze a második főtétellel.

A következő, kontinuumokat tárgyaló fejezetek miatt az additivitás-extendivitás tulajdonság segítségével bevezethető fajlagos és sűrűség jellegű mennyiségek hangsúlyosan szerepelnek.

Mindkét oldal fontos, a kontinuum és a homogén is. Itt is, mint a fizika számos szorosan kapcsolódó diszciplinájában (pl. fenomenologikus-statisztikus), nem egyszerű hierarchiáról van szó. Látszólag a kontinuumnak speciális esete a homogén, de nem minden kontinuumelmélet lokalizálható, azaz nem építhető fel homogén részekből (ennek egy speciális esete a lokális egyensúly, mint azt majd kihasználjuk a 2.8.2, illetve a 3.6 fejezetekben). Másrészt a Gibbs-reláció, a homogén elméletek alapösszefüggése, jól értelmezhető térderiváltaktól függő entrópiafüggvények esetén is, azaz bizonyos inhomogenitások homogenizálhatóak.

Általában az mondható, hogy a közönséges termodinamikai modellek elemzése elvi szempontból érdekes, mert ami egy egyszerű modellben sem érthető, attól nem nagyon várható, hogy a körülmények bonyolítása érthetővé teszi. Másrészt pedig műszaki, alkalmazási szempontból ezeknek az egyszerűsített modelleknek kikerülhetetlen a szerepük. Hiába ismerjük a hővezetési egyenleteket és tudjuk megoldani mindenféle perem- és kezdeti feltételek esetén, a hőátadási modelleket kell használnunk nagy

méretű és összetett rendszerek tervezésekor és felépítésekor. Egy teljes hőerőművet például értelmetlen és gyakorlatilag lehetetlen egészében kontinuumként modellezni.

Konstitutív elmélet

A második fejezet nemrelativisztikus kontinuumelméleteket tárgyal. Ez a fejezet a szokásos disszipatív elméletek termodinamikai általánosításait vizsgálja. Elsősorban az adott elméletben szokásosnál magasabb rendű térbeli deriváltakat, azaz a gyengén nemlokális kiterjesztés lehetőségét, másrészt pedig a magasabbrendű időderiváltakat tartalmazó egyenleteket is. Három konstrukciós módszer alkalmazására kerül sor:

1. A belső változók módszere – magasabbrendű időderiváltakat tartalmazó egyenleteket ad.
2. Az áramszorzók módszere – lokalizálható, transzport eredetű inhomogenitásokat tartalmazó egyenleteket ad.
3. Függvényegyenlőtlenség-elemzés – matematikai vizsgálat a második főtétel egyenlőtlenségének általában megfelelő konstitutív függvények megtalálására. Ennek legáltalánosabb változata a feltételes egyenlőtlenségrendszerek Farkas Gyula féle megoldási módszere, amelynek speciálisan a második főtételre vonatkozó, nemegyensúlyi termodinamikai változatát Liu-eljárásnak nevezik.

Ezek a módszerek a második főtételen alapulnak, azaz a konstrukciójuk során már beépítik a második főtétel megfelelő formáját. Mindhárom esetben a termodinamikai erők és áramok bevezetése is szerepet játszik.

Objektivitás és téridő

Az objektivitás, a vonatkoztatásirendszer-függetlenség követelménye a kontinuumfizika alapelvei között különös helyet foglal el. Egyrészt mindenki elfogadja, másrészt nincs egyetértés a pontos formáját illetően. A második fejezetben, illetve a függelékben tárgyalom ennek néhány aspektusát, egyrészt megmutatva, hogy az objektivitás szokásos megfogalmazása hibás, másrészt a téridő motivációjú háttérrel adva a klasszikus objektív időderiváltaknak. Ennek az elemzésnek bizonyos következményeit figyelembe veszi a nemrelativisztikus elmélet tárgyalása.

A harmadik fejezetben viszont a speciális relativisztikus hidrodinamika kapcsán objektív, vonatkoztatásirendszer-független megfogalmazás adható és a nemrelativisztikus elmélet számos buktatója kikerülhető (ennek az elemzésnek a tapasztalatait a nemrelativisztikus elemzés is használja). Itt, a relativisztikus disszipatív hidrodinamika elsőrendű stabil elméletének megfogalmazásában mindhárom kiemelten említett problematikus pontra adott válasz fontos: a második főtétel és a stabilitás viszonyának, a második főtétel modern elemzési módszereinek és az objektív tárgyalásmódnak egyaránt lényeges szerepe van.

Matematika és axiomatizálás

A termodinamikában és a kontinuumfizikában az axiomatizálásnak, illetve a matematika intenzív használatának nagyon erős hagyományai vannak. Véleményem szerint ezeket a hagyományokat nagyrészt a zavarosságnak az az alapelménye táplálja,

amivel mindkét elmélet megtanulásakor találkozhatunk. A második főtétele, illetve az entrópia fogalma a statisztikus elmélet nélkül is sokrétű és a megértéshez közelítve jelentésének számos rétegét kell feltárni.

Ez a dolgozat nem axiomatikus és nem is nagyon matematikai, a fizikai hátteret hangsúlyozza. Viszont messzemenőig épít a matematikai elemzésekre, elsősorban Matolcsi Tamás közönséges termodinamikájára és a téridő modellszintű pontos fogalmára, illetve Clifford Truesdell racionálisként jellemzett kontinuumelméleti iskolájának eredményeire. Bizonyos szempontból azokat igyekszik továbbfejleszteni kevésbé matematikai módon.

Elmélet és technológia

A termodinamika, mivel a nem idealizált fizikai rendszerek törvényszerűségeivel foglalkozik, nagyon gyakorlati tudomány. Ebben a dolgozatban elméleti munkákat foglalok össze, így csak néhol tudom érzékeltetni azokat az eredményeket, amiket a kidolgozott modellek gyakorlati alkalmazásának irányába tettünk kollégáimmal közösen.

A körülmények és a szerencse úgy hozták, hogy a termodinamikai rendszerek közül a közetmechanika anyagelmélete, reológiai, károsodási hatásokkal összefüggő gyakorlati problémái adták a motivációkat és a visszacsatolást az elmélet fejlesztéséhez. A kövek bonyolultak. Repedeznek, törnek, folynak, egyszerűen ideálisak mindenféle nemideális jelenség tanulmányozására.

Köszönetek

Tanáraim és kollégáim, akik leginkább hatással voltak rám és akiktől a legtöbbet tanultam Asszonyi Csaba, Biró Tamás Sándor, Fülöp Tamás, néhai Gyarmati István, Matolcsi Tamás és Verhás József. Köszönet továbbá legkedvesebb munkatársaimnak, akikkel együtt dolgozhattam, Vásárhelyi Balázsnak, Christina Papenfussnak, Antonio Cimmellinek, Wolfgang Muschiknak és Arkadi Berezovskinak. A támogatásukért hálás vagyok Lévai Péternek, Gróf Gyulának és Wolf Györgynek, Lámer Gézának pedig a kézirat gondos átnézéséért. A hajdani BME Kémiai Fizika Tanszék, a hajdani RMKI Elméleti Fizika Főosztály (most Wigner FK RMI Elméleti Fizika Osztály) és a BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék kollektívájának pedig köszönöm a helyet, ahol jó volt és jó dolgozni. Családomnak pedig azt, hogy elvisel.

A munkát az OTKA K81161 pályázatával támogatta.

1. Homogén testek – közönséges termodinamika

1.1. Bevezetés - történeti megjegyzések

A klasszikus, egyensúlyi termodinamika (a továbbiakban *termosztatika*), a XIX. század folyamán alakult ki. Ebben az időszakban Farkas Gyula második főtétellel kapcsolatos vizsgálatai említendők [74]. Erre alapozva Fényes Imre általános axiomatikus tárgyalást dolgozott ki [77], majd kísérletet tett a nemegyensúlyi termodinamikába történő beágyazására, Onsager munkái nyomán [78]. A későbbi munkák közül Truesdell és Bharatha [290] kutatásai tekinthetők ebbe az irányba tett további lépéseknek.

Ugyancsak a homogén testek nemegyensúlyi termodinamikájának egy ágát jelenti az utóbbi évtizedekben megjelent úgynevezett *véges idejű*, illetve *endoreverzibilis* termodinamika [54, 2, 17]. Ezek a rokon irányzatok valódi, időben zajló folyamatokat tárgyalnak homogén termodinamikai rendszerekben, de lényegében elvi megalapozás nélkül¹. Fényes, illetve Truesdell és Bharatha munkáinak legfontosabb hiányossága, hogy a második főtételt nem teszik érthetőbbé, mint az egyensúlyi termodinamikai elmélet. Azt, hogy ez lehetséges, azaz hogy a második főtétel fizikailag világos és matematikailag is tiszta állításként jelenhet meg egy megfelelő nemegyensúlyi elméletben Matolcsi Tamás mutatta meg [199, 200, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208].

Ebben a fejezetben röviden bemutatom a termodinamika Matolcsi-féle elméletének, a *közönséges termodinamikának* alapállítását, miszerint a II. főtétel a termodinamikai egyensúly aszimptotikus stabilitását biztosító feltételrendszer, ahol a termodinamikai rendszer teljes entrópiája az aszimptotikus stabilitást biztosító Ljapunov függvény. Gázokra és folyadékokra, illetve rugalmas anyagra levezetem a megfelelő entrópiatermelést. Ezek a termodinamikai rendszerek azok, ahol homogén testek esetén – a mechanikai tehetetlenség miatt – a termodinamikai tárgyalások általában nem teljesek (esetleg rosszak).

Ez a rövid ismertető szükséges a vonatkozó kontinuumelméletek lokális egyensúlyi hátterének előkészítéséhez. A későbbiekben kicsit felvillan, a visszafele vezető út is, hogy a kontinuumelméletekből hogyan kaphatjuk vissza a homogén termodinamikai testek evolúciós egyenleteit és hogyan értelmezhetjük a benne szereplő paramétereket.

¹ Emiatt több kritikát is kaptak, lásd [176, 225, 116]

1.2. Termosztatika, mechanika és termodinamika

A termosztatika kulcsfogalma az *egyensúly*, de mivel a termosztatika nem vezet be folyamatokat, illetve az esetlegesen használt folyamatfogalmait – a kvázisztatikus, illetve irreverzibilis folyamat – nincsenek expliciten definiálva, ezért a termosztatikai egyensúly fogalmában többféle dolog keveredik. Egyensúly alatt többek között impliciten az időfüggetlenséget, homogenitást, disszipációmentességet szokás érteni. Azonban a termosztatikai egyensúly fogalma – amennyiben jelentése egyáltalán kibogozható – a fizikai rendszerek *redukálhatóságát* és *szeperálhatóságát* jelenti. Redukálhatóságot, hiszen többnyire legalább 10^{20} - 10^{40} számú atomi, molekuláris, mezoszkopikus fizikai mennyiség együttes hatását akarjuk néhány változóval jellemezni, anélkül, hogy bármit is tudnánk azok részletes viselkedéséről. A termosztatikai egyensúly azt jelenti, hogy ez a jellemzés egyáltalán megtehető, azaz az ettől való eltérés – újabb változók, memóriahatások vagy akár részecskeszintű leírás segítségével jellemezve – már nem termosztatikai egyensúlyi állapotot jelent. Az állapottér redukálhatósághoz azonban sem időfüggetlenség, sem homogenitás, sem disszipációmentesség nem szükséges, sőt még az sem feltétel, hogy a fizikai rendszer különösebben nagy, vagy összetett legyen. A redukálhatóságot, a fizikai jellemzők bevezetésének egyik legfontosabb feltételét, a termodinamika nulladik főtétele az egyensúly tulajdonságának tekinti: ez a szeperálhatóság, azaz, hogy a fizikai mennyiségek egyes termodinamikai testeket jellemeznének [25]. Ezt a feltételt elfogadva a redukálhatóságot a dinamikai tulajdonságokon keresztül lehet igazán megérteni: a termodinamikai rendszerek hierarchiájában az egyszerűbb, de univerzálisabb modellek világos módon és feltételekkel részei a bonyolultabb, több változós elméleteknek. A redukálhatóságot, és az „egyensúly” bonyolult fogalomkomplexumát az időfüggés explicit figyelembe vétele, azaz a nemegyensúlyi termodinamika teszi világossá, ahol az időfüggetlenség és a komplexitás kérdésköre szétválasztható.

A termodinamikai mennyiségeket minden bevezető termodinamika könyv egyensúlyban tekinti értelmesnek [78, 265, 118]. Mint azt fentebb említettük, ennek a kijelentésnek a nemegyensúlyi termodinamika szerint az időfüggetlenség nem lényeges eleme. A termodinamika és a termosztatika viszonya nem nyilvánvaló, és különösen a termodinamikai potenciálok, elsősorban az entrópia szerepét kell újraértékelnünk. A termosztatika alapállítása az entrópia, mint potenciál létezése. A továbbiakban mi is ebből fogunk kiindulni, és röviden összefoglaljuk a vonatkozó összefüggéseket.

A termodinamikai mennyiségek időbeli változásának leírására közönséges differenciálegyenleteket használunk, az adott változók *fejlődési egyenleteit*. Mivel mechanikai rendszereket – gázokat, folyadékokat és szilárd testeket – fogunk tárgyalni, ezek a fejlődési egyenletek néha speciálisan mozgásegyenletek, ezért a termodinamikai elmélet fejlődési egyenleteinek tartalmaznia kell a Newton-egyenlet megfelelő alakját is, disszipatív és nem disszipatív esetben egyaránt. Ez a nemegyensúlyi termodinamikának a tehetetlenségi hatások modellezése szempontjából jelent kihívást.

Ebben az írásban nem célom a termosztatikai elmélet részletes bevezetése, kritikája, vagy egyes paradoxonjainak részletes feloldása. Ezzel részletesen foglalkoznak a fentebb már említett könyvek [290, 207, 208].

1.3. Közöséges termodinamika - homogén gázok és folyadékok I.

1.3.1. Termosztatika

A termostatika gázokra és folyadékokra feltételezi, hogy az entrópia a klasszikus extenzív változóknak – az E belső energiának, a V térfogatnak és az N részecskeszámnak vagy az M tömegnek a függvénye. Ebben az írásban nemrelativisztikus és relativisztikus termodinamikai megfontolásokat egyaránt használunk, ezért az anyagmennyiség jellemzésére a részecskeszámot vezetjük be az entrópia változójaként: $S(E, V, N)$. Állandó m részecsketömeg esetén a megszokottabb tömeges leírásra az $M = mN$ módon térhetünk át. Az entrópia termodinamikai potenciál, parciális deriváltjai az entropikus intenzívek. Ezek függvényformája, extenzív mennyiségektől való függése mérhető, ezért az entrópiát fizikailag parciális deriváltjaival definiálhatjuk:

$$S(E, V, N), \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial N} = \frac{\mu}{T}. \quad (1.1)$$

Ezeket a viszonyokat tömören a Gibbs-reláció segítségével szoktunk megadni,

$$dE = TdS - pdV + \mu dN \quad (1.2)$$

formában. A fenti formulákban T a hőmérséklet, p a nyomás, μ pedig a kémiai potenciál. Ezenkívül a termodinamikai mennyiségek között a következő összefüggés is fennáll:

$$E = TS - pV + \mu N, \quad (1.3)$$

amit *potenciál-tulajdonságnak* fogunk nevezni. (1.2) és (1.3) következménye a Gibbs–Duhem-reláció:

$$SdT - Vdp + Nd\mu = 0.$$

Az

$$e = E/N, \quad s = S/N, \quad v = V/N \quad (1.4)$$

fajlagos extenzívekre igaz, hogy

$$s = s(e, v), \quad \frac{\partial s}{\partial e} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{p}{T}, \quad (1.5)$$

és

$$de = Tds - pdv. \quad (1.6)$$

A potenciál-tulajdonság és a Gibbs–Duhem-reláció megfelelő formái egyszerűen következnek a fentiekből:

$$\mu = e - Ts + pv, \quad d\mu = -sdT + vdp. \quad (1.7)$$

A fajlagos mennyiségeket a kémiai potenciál parciális deriváltjaiként kapjuk a (T, p) intenzív mennyiségek szerint. Hasonlóan, bevezethetjük az extenzívek sűrűségeit is

$$e = E/V, \quad s = S/V, \quad n = N/V \quad (1.8)$$

1. Homogén testek – közösleges termodinamika

definíciókkal. Ekkor a sűrűségekre az entrópiát definiáló parciális deriváltak és a Gibbs-reláció következő módon írhatóak:

$$s = s(e, n), \quad \frac{\partial s}{\partial e} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial n} = -\frac{\mu}{T}, \quad (1.9)$$

illetve

$$de = Tds + \mu dn. \quad (1.10)$$

A potenciál-tulajdonságot és a Gibb–Duhem-relációt is érdemes felírunk:

$$p = -e + Ts + \mu n, \quad dp = sdT + nd\mu. \quad (1.11)$$

Sűrűségekre a nyomás tekinthető a potenciálnak a (T, μ) intenzívekkel változóként. A fajlagos mennyiségek, illetve a sűrűségek bevezethetőségét az tette lehetővé, hogy bizonyos változókat extenzívnek, rádásul additívnek tekintettünk. Az extenzivitás a kulcsa annak, hogy homogén testekről kontinuumokra is átvihessük a fenti formulákban megfogalmazott tulajdonságokat.²

Figyeljük meg, hogy a fentiekben elég lett volna két változóra bevezetni az entrópiát ((1.5) vagy (1.9) módon), ezután az extenzivitással kiterjeszthetjük három változóra. Egy változóra a potenciál létezése triviális, két változóra vonatkozóan a termodinamikai hagyományoknak megfelelően hőmérsékletet, azaz a kalorikus állapotfüggvényt vezetjük be úgy, hogy az entrópia létezzen, azaz integráló osztóként. Ekkor a potenciál létezése matematikai tétel. Az entrópia létezése csak ennél több változóra jelent fizikai feltételt (Ezt Farkas Gyula bizonyította [74, 77]).

Gázok esetén az állapothatározó fajlagos mennyiségek az e fajlagos belső energia és a v fajtérfogat. Az állapotfüggvényeket ezekkel a *kanonikus változókkal* adjuk meg. A termikus és kalorikus állapotfüggvények ekkor $p(e, v)$ és $T(e, v)$ a megfelelő állapottérben értelmezve. A fajlagos entrópiát, mint állapotfüggvényt, a fenti (1.5) formulákkal definiáljuk, ami ekvivalens az (1.6) Gibbs-relációval. Az összes fenti megfogalmazás (1.7), illetve az extenzivitás segítségével megkapható. Habár az előző formulák esetén automatikusan feltételeztük a megfelelő mértékű folytonosságot és differenciálhatóságot, valójában a termodinamikában sem tehetjük ezt meg minden további nélkül, hiszen például a fázisokat és fázishatárokat pontosan ezeknek a tulajdonságoknak a segítségével modellezzük. Mivel a továbbiakban itt részletesen nem foglalkozunk fázisokkal, így mindig automatikusan fel fogjuk tételezni a lokális invertálhatóságot és megfelelő számú deriválhatóságot.

Az entrópia segítségével két feltételt szabunk meg az állapotfüggvényekre.

Egyrészt az entrópia, mint potenciál létezésének következménye vegyes második parciális deriváltjainak egyenlősége megszorítás a kalorikus és termikus állapotfüggvényekre. Esetünkben tehát (1.5), illetve (1.6) miatt fennáll, hogy

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{T} = \frac{\partial^2 s}{\partial e \partial v} = \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial e} = \frac{\partial}{\partial e} \frac{p}{T} \quad (1.12)$$

² Additivitásból következik az extenzivitás. Vannak nem additív, illetve nemextenzív termodinamikák [25].

Ezt az összefüggést (illetve ennek többváltozós általánosítását) nevezzük *Maxwell-reláció(k)*nak. A fajlagos mennyiségek definícióját felhasználva a teljes termodinamikai testre vonatkozóan a fenti (1.12)-ből automatikusan három Maxwell-reláció vezethető le.

A másik feltétel az entrópia konkávitásának követelménye, azaz a *termodinamikai stabilitás*. Kétszer folytonosan differenciálható állapotfüggvények esetén ez az entrópia teljes második deriváltjára jelent feltételt, azt jelenti, hogy

$$D^2s(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \frac{1}{T} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{T} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \frac{p}{T} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{p}{T} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

negatív definit. Könnyű belátni, hogy ez az alábbi egyenlőtlenségekkel kiértékelhető:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{v}}(T, \mathbf{v}) < 0. \quad (1.14)$$

Konkáv fajlagos entrópia, azaz termodinamikai stabilitás szükséges ahhoz, hogy az entrópiának maximuma lehessen termodinamikai egyensúlyban. Éppen ezért alapkövetelménynek tekintjük, az állapothatározók (\mathbf{e}, \mathbf{v}) teréből kizárjuk azt a tartományt, ahol a fenti egyenlőtlenségek sérülnek. Ideális gáz a teljes kanonikus állapotterén értelmezett, de például a Van der Waals-gáz már nem, az ún. spinodális görbe alatti terület a (p, v) diagrammon például sérti a termodinamikai stabilitást. Ezeknek az egyenlőtlenségeknek szemléletes fizikai jelentésük is van. Természetesen sűrűségekre is átfogalmazható a fenti feltételrendszer. Ekkor azt kapjuk, hogy

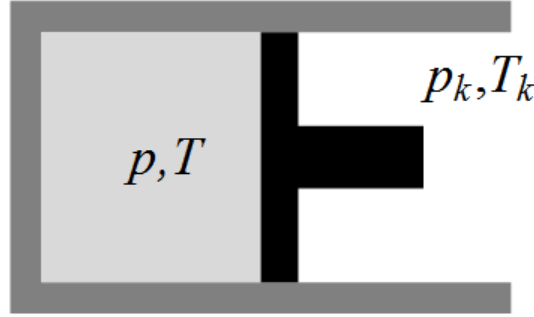
$$\frac{\partial T}{\partial e}(e, n) > 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial n}(T, n) \geq 0. \quad (1.15)$$

Megjegyzendő, hogy az (1.1) összefüggésekkel meghatározott teljes entrópia második deriváltja nem lesz negatív definit, csak negatív szemidefinit a homogenitási feltétel miatt.

Láttuk, hogy a fenti definíció szerint értelmezett entrópia a mérhető fizikai mennyiségek tulajdonságaira ad megszorítást, egy állapotfüggvény nem lehet akármilyen. Ez a definíció lehetővé teszi, hogy egyszerűen bevezessük a *környezet entrópiáját* is. Egy termodinamikai testet környezetnek tekintünk, ha hőmérséklete és nyomása, ebből következően pedig kémiai potenciálja is előírt, illetve időben állandó. Legyen ez az állandó hőmérséklet T_k , az állandó nyomás pedig p_k . Fajlagos entrópiája ekkor (1.5) alapján egyszerűen kiszámolható:

$$s_k(\mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{T_k} \mathbf{e}_k + \frac{p_k}{T_k} \mathbf{v}_k + s_0, \quad (1.16)$$

ahol \mathbf{e}_k és \mathbf{v}_k a környezet fajlagos belső energiája és fajtérfogata, s_0 pedig állandó. A szokott fizikai intuíción alapuló kijelentéseket a környezet – hőtartály vagy nyomástartály – nagyságáról vagy változatlanóságáról egy dinamikai elmélettel természetesen bizonyítani lehet, és a feltételei is megadhatóak.



1.1. ábra. Egyszerű termodinamikai rendszer.

1.3.2. Termodinamika

Ha a homogén testekre vonatkozó termodinamikában időbeli változásokkal kívánunk foglalkozni – eléggé elvárható, hogy legyen egy ilyen elméletünk, amely képes egyszerűen leírni mondjuk egy bögre tea lehűlését – akkor ezt a megfelelő termodinamikai változókra vonatkozó differenciálegyenletekkel tudjuk kényelmesen megtenni. Természetesen ez egy nagyon egyszerű modelljét jelenti a klasszikus termodinamikának, a térbeli változásokat is leíró elméletet majd a kontinuumok tárgyalásakor fogalmazzunk meg.

Az első főtétel, mint a belső energia mérlege, kapcsolatba hozható egy differenciálegyenlettel, amennyiben azt

$$\dot{e} = q(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \dots) + w(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \dots) \quad (1.17)$$

formában írjuk fel. Itt a pont időderiváltat jelent, azaz \dot{e} a termodinamikai test fajlagos belső energiájának időegységre eső megváltozását jelenti, q a fajlagos hőteljesítmény (heating) az időegység alatt átadott termikus energia, w pedig a fajlagos mechanikai teljesítmény, az időegység alatt a homogén testen végzett munka fajlagos értéke (working). A hő és a munkát jellemző mennyiségek nem értelmezhetőek, csak akkor, ha vizsgált termodinamikai test kapcsolatban van a környezetével. q és w a kölcsönhatást jellemző mennyiségek. Éppen ezért a környezet, vagy szomszédos termodinamikai test, testek jellemzőitől is függeniük kell. A továbbiakban a 1.1 ábrán látható egyszerű termodinamikai rendszert fogjuk vizsgálni, egy gáztestet termikus és mechanikai kölcsönhatásban a környezetével. Ebben az esetben a fenti q és w kölcsönhatási függvényekbe a három pont helyébe a környezet jellemző paraméterei kerülnek.

Általában a Gibbs-relációt a termodinamika könyvek azonnal kapcsolatba hozzák az első főtétellel. Olyasféle formulákkal találkozhatunk, például, hogy

$$dE = \delta Q + \delta W = TdS - pdV,$$

ahol d teljes differenciál (matematikailag 1-forma, ahogy eddig), illetve δ nem teljes differenciál, hanem csak valami változást jelöl. Itt nem célunk ennek az egyenlőségnek, a benne szereplő mennyiségeknek a részletes értelmezése, ezt számos különböző értelemben megteszik a termosztatikai tankönyvek, mind matematikai, mind fizikai szempontból [290]. A folyamatok tárgyalása szempontjából csak egyetlenegy dologra

hívjuk fel a figyelmet. A mi fenti jelöléseinkkel, időbeli változásokat tartva szem előtt a következő értelmezést tehetjük:

$$\dot{e} = q + w \stackrel{?}{=} T\dot{s} - p\dot{v} = \dot{e} \quad (1.18)$$

Az utolsó egyenlőség pontosan igaz, az (1.6) Gibbs-reláció következményeként. Az első egyenlőség az energia megmaradása a fenti fajlagos mennyiségekre. Viszont hogyan állhat fenn a $q = T\dot{s}$ összefüggés, azaz miként lehet egyenlő a hőáram – a test és a környezet adataitól egyaránt függő fizikai mennyiség –, a test hőmérsékletének és a testet jellemző entrópia időderiváltjának szorzatával? Milyen feltételek mellett és miért lesz $w = -p\dot{v}$? A $T\dot{s}$ szorzat csak az 1.1 ábra hengerébe zárt gáz termodinamikai adataitól függ és semmi köze a környezethez! Ez a fizikai kérdés a differenciálok bármilyen matematikai értelmezése mellett feltehető.

A továbbiakban, az 1.1. ábrán látható termodinamikai rendszerre vonatkozóan, az első főtétele a homogén termodinamikai testre vonatkozó mérlegként értelmezzük a kontinuumelméletek szellemében a következő módon:

$$\dot{e} = q(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k) + w(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k). \quad (1.19)$$

Itt szembesülünk először egy tipikus termodinamikai problémával: a kitűzött feladat alulhatározott, több változónk van, mint egyenletünk, és a kölcsönhatási függvényeket sem ismerjük [290]. Az általános termodinamikai hozzáállás az, hogy tegyük fel a legáltalánosabb, kezelhető formában a hiányzó egyenleteket és függvényeket (figyelembe véve minden rendelkezésünkre álló fizikai kényszert és információt), ekkor a második főtétele segítségével megkonstruálhatóak a hiányzó konstitutív és mozgásegyenletek. (1.19) mellett szükség van egy másik differenciálegyenletre ahhoz, hogy teljes dinamikai törvényt kapjunk. A közönséges termodinamika feltételezi, hogy ez a differenciálegyenlet a következő általános formában írható:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k), \quad (1.20)$$

ahol \mathbf{f} az előbbiek szerint egy általános kölcsönhatási függvény. Ez a klasszikus termodinamika implicit alapfeltevése, a legegyszerűbb tárgyalható eset. Ennél általánosabb feltevéssel is élhetünk azonban, látni fogjuk, hogy sok szempontból természetesebb másodrendű differenciálegyenletet előírni a fajlagos térfogatváltozásra, ezáltal figyelembe véve a közeg mozgásának tehetetlenségét is. A klasszikus termodinamika pontosan azért robusztus elmélet, mert a térfogatváltozásra felírható differenciálegyenlet konkrét formájától gyakorlatilag függetlenül érvényes állításokat fogalmaz meg.

Az *egyensúlyt* itt egyszerűen időfüggetlenségként fogalmazhatjuk meg. Ez dinamikai tulajdonságként, azaz a kölcsönhatási függvényekben határozódik meg, az intenzív állapothatározókkal szoktuk kapcsolatba hozni. Elvárjuk, a hőmérsékletek és a nyomások egyenlősége esetén a termodinamikai rendszer állapota ne változzon, azaz, hogy a fenti (1.19)–(1.20) differenciálegyenletnek ekkor egyensúlyi megoldását kapjuk. Ezért fel fogjuk tételezni, hogy a kölcsönhatásra jellemző mennyiségek az extenzív állapothatározóktól az intenzíveken keresztül függenek, és az intenzívek egyenlőségekor nullák:

$$q(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k) = q(T(\mathbf{e}, \mathbf{v}), p(\mathbf{e}, \mathbf{v}), T_k, p_k) \quad \text{és} \quad q(T_k, p_k, T_k, p_k) = 0, \quad (1.21)$$

$$f(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{f}(T(\mathbf{e}, \mathbf{v}), p(\mathbf{e}, \mathbf{v}), T_k, p_k) \quad \text{és} \quad \mathbf{f}(T_k, p_k, T_k, p_k) = \mathbf{0}. \quad (1.22)$$

1. Homogén testek – közönséges termodinamika

Vegyük észre, hogy ez a bonyolultnak tűnő állítás szinte minden termodinamika könyvben, mint természetes követelmény szerepel, általában a nulladik főtétel részeként megfogalmazva és dinamikai állításokkal keveredve: [118] 36. oldal, [127, 129, 32, 235, 176].

A *mechanikai munkavégzésről* feltesszük, hogy ideális, azaz a következő formába írható:

$$w = -pf \quad (1.23)$$

Mindezek után a fenti (1.19)–(1.20) differenciálegyenlet rendszernek egyensúlyi megoldását kapjuk a

$$T(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = T_k, \quad p(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = p_k \quad (1.24)$$

egyenletrendszer $(\mathbf{e}_e, \mathbf{v}_e)$ megoldásaiként. Egy adott környezeti hőmérséklethez és nyomáshoz természetesen nemcsak egyetlen egyensúly tartozhat.

Ezek után a második főtételhez már csak egyetlen, az előbbiektől független feltétel szükséges. Nevezetesen azt kell biztosítanunk, hogy termodinamikai rendszer – azaz a termodinamikai test és a környezet – entrópiája együttesen növekedjen, figyelembe véve a további kényszereket. Esetünkben ezek a kényszerek a következők:

1. A termodinamikai rendszer és a termodinamikai test részecskeszáma állandó, azaz a test és környezete zárt rendszert alkot és nincs anyagátadás a test és a környezet között:

$$N = \text{áll.} \quad \text{és} \quad N_k = \text{áll.} \quad (1.25)$$

2. A termodinamikai rendszer össztérfogata állandó: $V + V_k = V_0 = \text{áll.}$ Ebből a fajlagos mennyiségekre az következik, hogy

$$N\dot{\mathbf{v}} + N_k\dot{\mathbf{v}}_k = 0. \quad (1.26)$$

3. A termodinamikai rendszer összes belső energiája állandó: $E + E_k = E_0 = \text{áll.}$, és nincs más energiafajta. Ekkor

$$N\dot{e} + N_k\dot{e}_k = 0. \quad (1.27)$$

Ezek után a termodinamikai test és a környezet entrópiájának időegységre eső változása – az entrópiatermelés – a következő módon írható:

$$\begin{aligned} (S + S_k)^\bullet &= \frac{d}{dt}(S + S_k) = \frac{d}{dt}(N\mathbf{s}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) + N_k\mathbf{s}_k(\mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k)) = \\ &= N \left(\frac{1}{T}\dot{e} + \frac{p}{T}\dot{\mathbf{v}} - \frac{1}{T_k}\dot{e} - \frac{p_k}{T_k}\dot{\mathbf{v}} \right) = N \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) (q - pf) + N \left(\frac{p}{T} - \frac{p_k}{T_k} \right) f = \\ &= \frac{N}{T_k} \left((T_k - T)\frac{q}{T} + (p - p_k)f \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Itt egyrészt felhasználtuk először az (1.25)–(1.27) megmaradási kényszereket, majd a test és a környezet entrópiáinak (1.5) és (1.16) definícióit, végül pedig a (1.19)–(1.20) dinamikai törvényt. (1.28) a teljes entrópia (1.19)–(1.20) differenciálegyenlet-rendszer

szerinti deriváltja, amelyre a \blacksquare speciális jelölést alkalmaztuk. Ha az entrópia növekszik a fenti dinamikai törvénnyel leírható folyamatok esetén, akkor igaz a következő, úgynevezett *disszipációs egyenlőtlenség*:

$$(T_k - T) \frac{q}{T} + (p - p_k) f \geq 0. \quad (1.29)$$

Ezt az egyenlőtlenséget a q és az f kölcsönhatási függvényekre vonatkozó megszorítás-ként érdemes felfogni. Egyenlőség csak egyensúlyban állhat fenn benne. Fizikai érteleme világos és kézenfekvő. Például $f \equiv 0$ esetén a fenti egyenlőtlenségből következik, hogy a hőáram iránya ellentétes a test és a környezet hőmérsékletének különbségével, ezért (1.29) a második főtétel Clausius-féle megfogalmazásának egy pontos alakja [207]. Másrészt, ha $q \equiv 0$, akkor az adódik, hogy a térfogatváltozás a nyomáskülönbség irányába változik. Azaz, ha a test nyomása nagyobb, mint a környezeté, akkor a fajtérfogata nő, illetve ha kisebb, akkor a fajtérfogata csökken.

Ami pedig a fenti feltételrendszert, az entrópia konkávitását, az egyensúlyra vonatkozó előírást és a növekedés követelményét egységes keretbe foglalja, az a termodinamika második főtételének következő megfogalmazása:

1.1. Tétel (2. főtétel). *Az (1.19)–(1.20) differenciálegyenlet (1.24) egyenletrendszerrel definiált egyensúlyi megoldása aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. *Azt kell belátnunk, hogy $L(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = (S(\mathbf{e}, \mathbf{v}) + \hat{S}_k(\mathbf{e}, \mathbf{v}))/N$ Ljapunov-függvénye az egyensúlynak. Itt $\hat{S}_k(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = S_k((U_0 - \mathbf{e}N)/N_k, (V_0 - \mathbf{v}N)/N_k)$, azaz a környezet entrópiája a test entrópiájával kifejezve a megmaradási kényszerek segítségével. Egyrészt igaz, hogy L deriváltja nulla az egyensúlyban, másrészt pedig a második deriváltja megegyezik a test entrópiájának második deriváltjával, ami konkáv a termodinamikai stabilitás követelményének értelmében. Azaz L -nek szigorú maximuma van a termodinamikai egyensúlyban.*

Másrészt L -nek az (1.19)–(1.20) differenciálegyenlet szerinti deriváltjának szigorú minimuma van, az (1.29) disszipációs egyenlőtlenség szerint.

Azaz, a termodinamika entrópiára vonatkozó szokásos feltételezései:

- az entrópia, mint termodinamikai potenciál létezése,
- a termodinamikai stabilitás, azaz az entrópia konkávitása,
- a kölcsönhatásokra előírt tulajdonságok, amelyek az entrópia növekedését biztosítják

együttesen a környezettel történő egyensúly aszimptotikus stabilitását, azaz stabilitását és vonzását biztosító feltételrendszert eredményeznek. Mindez azt mutatja, hogy a homogén testek termodinamikája-sztatikája valóban lehet termodinamika, értelmesen tárgyalható egy mozgásegyenlet(-rendszer), egy dinamikai törvény segítségével.

A fenti dinamikai törvény – a mechanikai részre vonatkozó elsőrendű differenciálegyenlettel – tulajdonképpen egy pontos értelmezését adja az egyensúlyi vagy kvázisztatikus folyamat paradox fogalmának. Egyrészt ugyanis könnyű belátni, hogy a test folyamatait kontrollálni tudjuk a környezettel: bármely folyamat során a környezet hőmérsékletét és nyomását a test adott pillanatbeli hőmérsékletével és nyomásával

1. Homogén testek – közönséges termodinamika

egyenlővé téve a test egyensúlyba kerül, azaz megszűnik az energia- és a térfogatváltozás, a folyamat megáll. A folyamat ilyenkor termodinamikai egyensúlyok sorozatán keresztül halad³.

Másrészt kiszámolhatjuk a test (nem a teljes rendszer) entrópiájának változását, azaz differenciálegyenlet szerinti deriváltját:

$$\dot{s} = Ds \cdot (q - pf, f) = \frac{1}{T}(q - pf) + \frac{p}{T}f = \frac{q}{T}. \quad (1.30)$$

Ez pedig analóg a 'reverzibilisnek' nevezett folyamatok esetén megkövetelt, szokásosan $dS = \delta Q/T$ alakban írt összefüggéssel. Vegyük észre, hogy ezzel érthetővé tettük a fentebb említett, az első főtétel és a Gibbs-reláció összekötését megnehezítő paradoxont. Most már világos egyenlőséget írhatunk elő:

$$\dot{e} = q + w = T\dot{s} - p\dot{v} \quad (1.31)$$

A megváltozások időbeli megváltozásokat jelentenek, igaz, az entrópia esetén nem tetszőlegesen, hanem a fenti (1.19)–(1.20) differenciálegyenlet mentén értve! Az entrópia ilyen változása folyamatfüggő.

Egy dinamikai elmélet számos szempontból ad többet egy sztatikainál. Csak az itt tárgyalt legegyszerűbb termodinamikai testnél maradva: vizsgálható és értelmezhető olyan termodinamikai test, amelynek nincs entrópiája, de a második főtétel mégsem sérül, az egyensúly aszimptotikusan stabil marad. Vizsgálható, illetve egyáltalán felmerül a munka és a disszipációs egyenlőtlenység általánosításának lehetősége és a fázisok és fázishatárok is új fényben tűnnek fel a rájuk vonatkozó stabilitási kérdésekkel együtt.

A továbbiakban csak egyetlen speciális szempontra szorítkozunk, amely talán a legélesebben megmutatja a homogén testek nemegyensúlyi termodinamikájának egyrészt az erejét, ugyanakkor a korlátait is: a termodinamikai test folyamatainak tehetetlenségével és a belső energia jelentésével.

1.4. Kiterjesztett közönséges termodinamika – homogén gázok és folyadékok II.

A közönséges termodinamika (1.20) differenciálegyenlete mechanikai viselkedésre vonatkozik. Ebből a szempontból már első pillantásra látszik, hogy nem kielégítő. Egyfajta 'arisztotelészi', sűrűlódásvezérelt dinamikát jelent: hőtranszport nélkül az egyensúlyi fajtérfogatot monoton közelíti a termodinamikai test fajtérfogata. Mechanikai rendszerekben viszont a folyamatoknak tehetetlensége van, fenti rendszerünk pedig mechanikai rendszer is. Ehhez a fenti megfontolásokat általánosítanunk kell.

A termosztatika előző fejezetben vázolt alapösszefüggései, az állapotfüggvények formája érvényes marad itt is: a fajlagos entrópia az e belső energia és a v fajtérfogat függvénye. A termosztatikai összefüggéseket összefoglaló Gibbs-reláció változatlanul (1.6) marad, azaz az entrópiafüggvénye definíciója továbbra is az (1.5).

³ Másrészt reverzibilis is abban az értelemben, hogy a környezeten keresztül tudjuk szabályozni az irányát. Ugyanakkor adott kezdeti feltételek mellett visszafordíthatatlanul tart az egyensúlyhoz: ezt bizonyítja a fenti 1.1 tétel.

A dinamikai törvény mechanikai részére az energia megmaradása, azaz az első fő-tétel mellett egy másodrendű egyenletet vezetünk be:

$$\dot{e} = \tilde{q} - \tilde{p}\dot{v}, \quad (1.32)$$

$$\gamma\ddot{v} = \tilde{p} - p_k. \quad (1.33)$$

Itt γ állandó paraméter, a \tilde{q}, \tilde{p} jelölések jelentésére pedig hamarosan kitérünk. A fenti dinamikai törvény több vonásában is különbözik a közönséges termodinamika (1.19)–(1.20) egyenletrendszerétől. A legfontosabb különbség, hogy az állapottér, a differenciálegyenlet megoldásához szükséges változók száma, megnőtt. A fajtérfogatváltozás sebessége is állapothatározóvá lép elő, kezdeti feltételként szükséges az egyenletrendszer megoldásához. Az egyensúlyban mérhető állapothatározók tere kiterjedt egy nem-egyensúlyi – egyensúlyban nulla értékű – változóval.

Ennek megfelelően az állapotfüggvények és kölcsönhatási függvények is általában a teljes, kiterjesztett állapot függvényei. Az itt szereplő \tilde{q} fajlagos hőteljesítmény illetve \tilde{p} "valódi" nyomás nem azonos az (1.19)-ben szereplő q -val, illetve az (1.5)-ben szereplő p sztatikai nyomással. Ezek a függvények már a kiterjesztett állapottér új változójától, a \dot{v} térfogatváltozási sebességtől is függhetnek. Ez a lehető legegyszerűbb kiterjesztése a közönséges termodinamikának, az első főtétel és a Newton-egyenlet közvetlen, a fogalmi szerkezetet (erő, munka) teljesen megőrző általánosítása. A környezettel történő kölcsönhatás esetén állandó tömegű termodinamikai test esetén az osztérfogat és az összenergia megmarad, ezért fajlagosan:

$$\begin{aligned} v + v_k &= v_0 = \text{áll.}, \\ e + e_k + \frac{\gamma}{2}\dot{v}^2 &= e_0 = \text{áll.} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Itt v_k a környezetre jellemző fajtérfogat, v_0 pedig az állandó össz fajtérfogat, illetve e_k a környezetre jellemző fajlagos belső energia és e_0 pedig az állandó fajlagos teljesenergiásűrűség. Természetesen itt figyelembe kellett venni a mozgási energiát is.

Ebben az esetben a test és a környezet teljes entrópiája

$$s_T(e, v, \dot{v}) = s(e, v) - \frac{1}{T_k} \left(e + \frac{\gamma}{2}\dot{v}^2 \right) - \frac{p_k}{T_k} v. \quad (1.35)$$

Ennek a függvénynek az első deriváltja egyensúlyban nulla, a második pedig negatív definit, ha $\gamma > 0$, mert s konkáv. A fenti (1.32)–(1.33) differenciálegyenlet-rendszer szerinti deriváltja adja a disszipációs egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \dot{s}_T &= \frac{1}{T}\dot{e} + \frac{p}{T}\dot{v} - \frac{1}{T_k}\dot{e} - \frac{p_k}{T_k}\dot{v} - \frac{\dot{v}}{T_k}\gamma\ddot{v} = \\ &= \frac{1}{T}(q - \tilde{p}\dot{v}) + \frac{p}{T}\dot{v} - \frac{1}{T_k}(q - \tilde{p}\dot{v}) - \frac{p_k}{T_k}\dot{v} - \frac{\dot{v}}{T_k}(\tilde{p} - p_k) = \\ &= q \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) - \frac{1}{T}(\tilde{p} - p)\dot{v} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ha az egyenlőtlenség fennál, akkor a kiterjesztett termodinamikai test egyensúlya aszimptotikusan stabil. A fenti entrópiatermelés erre a rendszerre vonatkozóan mutatja, hogy a differenciálegyenletben szereplő teljes \tilde{p} nyomás és az entrópia deriváltja-ként kapható sztatikus p nyomás különbsége, mely a kontinuumok esetén megszokott

viszkózus nyomás megfelelője, csillapítja a térfogatváltozás sebességét. Ezzel egyszerű példát adhatunk az állapottér kiterjesztése miatt fellépő állapotfüggvényre:

$$\tilde{p}(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = p(\mathbf{e}, \mathbf{v}) - \eta \dot{\mathbf{v}}. \quad (1.37)$$

Itt η a kontinuum viszkozitásának megfelelő együttható, a fenti egyenlet pedig tulajdonképpen a Navier–Stokes-egyenletben szereplő Newton-féle nyomástenzor megfelelője a közönséges termodinamikában. Ez a formája az entrópiaprodukciónak teljesen analóg a hidrodinamikában kapott (2.100) entrópiaprodukció-sűrűséggel.

1.4.1. Példa: folyamatok Van der Waals-gázzal

Ebben a fejezetben a fenti egyszerű termodinamikai rendszerben egy Van der Waals-gáz folyamatait mutatjuk be a közönséges és kiterjesztett termodinamikai test folyamatai közötti különbséget. Legyenek tehát a termodinamikai test kalorikus és termikus állapotfüggvényei a redukált Van der Waals-gázéi (ekkor az összes fizikai mennyiséget a kritikus állapot értékeivel dimenziótlanítottuk):

$$T = \mathbf{e} + \frac{3}{\mathbf{v}}, \quad p = \frac{8T}{3\mathbf{v} - 1} - \frac{3}{\mathbf{v}^2}. \quad (1.38)$$

Vezessük be továbbá a fenti (1.37) viszkózus nyomást. A (1.32)–(1.33) fejlődési egyenletben tekintsünk Newton-féle hőátadást:

$$q = -\alpha(T - T_k). \quad (1.39)$$

A külső hőmérséklet és nyomás legyen pl. $T_k = 0.9$ és $p_k = 0.5$. Három egyensúlyi pontot kapunk az (\mathbf{e}, \mathbf{v}) -térben, az egyensúlyi redukált fajtérfogatok értéke: $\mathbf{v}_e = \{0.641, 0.859, 3.634\}$.

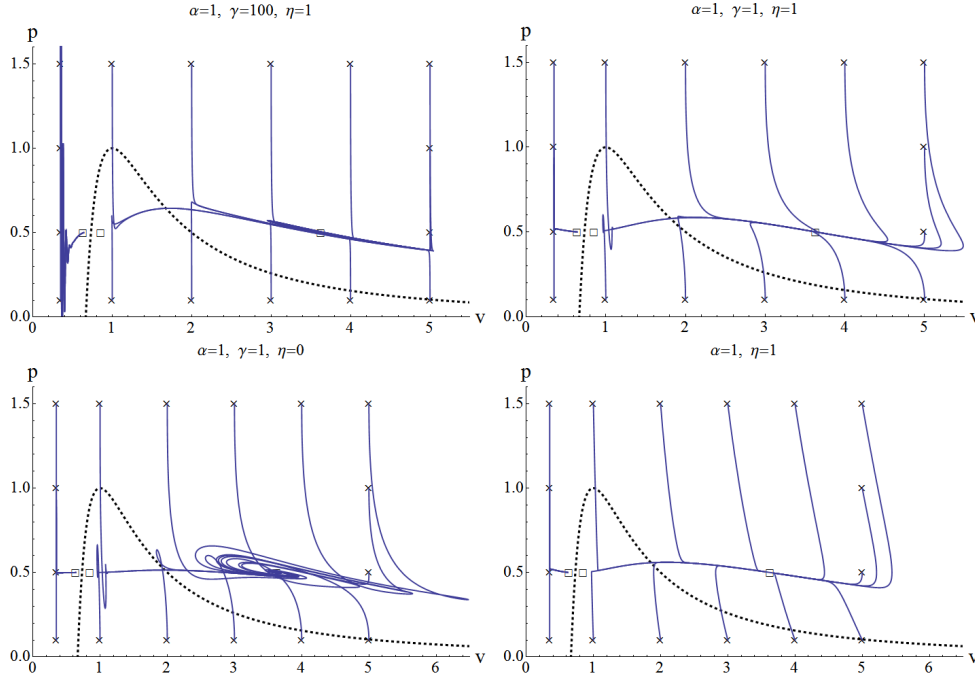
Az ábrákon a szaggatott vonal a stabilitási határ (spinodális), amely alatt a termodinamikai stabilitás egyenlőtlensége sérül. A három egyensúlyi pont egyike a folyadékfázisban, a másik gázfázisban, a harmadik pedig az instabil tartományban található. Az ábrákon a kereszttel jelzett pontokból indított megoldásait ábrázoltuk a fenti fejlődési egyenletnek különböző γ tehetetlenségi paraméter és η csillapítás esetén. Megfigyelhető, hogy a termodinamikailag nem megengedett tartományban levő egyensúlyi pont instabil dinamikailag is, míg a másik két egyensúlyi pont vonzó.

Az 1.2. ábra bal felső részén nagy a tehetetlenség és a csillapítás, $\alpha = 1, \gamma = 100, \eta = 1$. Látható, hogy megoldások gyakorlatilag állandó fajtérfogaton egy lassú sokaságra relaxálnak és annak mentén tartanak az egyensúlyhoz. Figyeljük meg a nyomásingadozást a folyadékfázisban. A jobb felső részen látható megoldásokban a tehetetlenségi paraméter kisebb, $\gamma = 1$, a lassú sokaságra kevésbé izochor módon relaxál a rendszer. A bal alsó ábrán pedig a csillapítást lecsökkentve erős térfogati és hőmérsékleti rezgéseket figyelhetünk meg a gőzfázisban levő egyensúlyi pont körül.

Végül pedig a jobb alsó részen közönséges termodinamikai (1.19)–(1.20) egyenletrendszer megoldásait láthatjuk a kölcsönhatási függvények előbbihez hasonló választásával ($\eta = \delta = 1$):

$$q = \alpha(T - T_k), \quad w = -pf, \quad f = (p - p_k)/\delta. \quad (1.40)$$

Az (1.19)–(1.20) differenciálegyenlet rendszernek fold bifurkációja van a kritikus pontban.



1.2. ábra. Van der Waals-gáz folyamatai.

1.4.2. Teljes és belső energia

Tanulságos az előző fizikai rendszer egyenleteit az e_t teljes fajlagos energia segítségével is röviden megfogalmazni. Az entrópiasűrűség ekkor nemcsak az energia és a fajtérfogat, hanem a fajtérfogat időderiváltjának is függvénye (!). Azaz a termosztatikai összefüggéseket összefoglaló Gibbs-reláció a következő:

$$de_t = Tds - pdv + \gamma \dot{v} \dot{v}. \quad (1.41)$$

Ezzel egyenértékűen írhatjuk, hogy

$$s(e_t, v, \dot{v}), \quad \frac{\partial s}{\partial e_t} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{p}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \dot{v}} = -\frac{\gamma \dot{v}}{T}. \quad (1.42)$$

A dinamikai egyenletek közül (1.33) változatlan marad, az első főtétel pedig a következőképpen módosul:

$$\dot{e}_t = \tilde{q} - p_k \dot{v}. \quad (1.43)$$

Azaz a külső nyomás teljesítménye növeli a teljes energiát. A megmaradó mennyiségek:

$$\begin{aligned} v + v_k &= v_0 = \text{áll.} \\ e_t + e_k &= e_0 = \text{áll.} \end{aligned} \quad (1.44)$$

A teljes entrópia

$$s_t(e_t, v, \dot{v}) = s(e_t, v, \dot{v}) - \frac{1}{T_k} e_t - \frac{p_k}{T_k} v. \quad (1.45)$$

1. Homogén testek – közönséges termodinamika

Ennek a fenti (1.43) és (1.33) differenciálegyenletek szerinti deriváltja adja a disszi-
pációs egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_t &= \frac{1}{T} \dot{\mathbf{e}}_t + \frac{p_k}{T} \dot{\mathbf{v}} - \frac{\gamma \dot{\mathbf{v}}}{T} - \frac{1}{T_k} \dot{\mathbf{e}}_t - \frac{p_k}{T_k} \dot{\mathbf{v}} = \\ &= \frac{1}{T} (q - p_k \dot{\mathbf{v}}) + \frac{p}{T} \dot{\mathbf{v}} - \frac{\dot{\mathbf{v}}}{T} (\tilde{p} - p_k) - \frac{1}{T_k} (q - p_k \dot{\mathbf{v}}) - \frac{p_k}{T_k} \dot{\mathbf{v}} = \\ &= q \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) - \frac{1}{T} (\tilde{p} - p) \dot{\mathbf{v}} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Nem meglepő módon ugyanazt kapjuk, mint előbb. Vegyük észre, hogy a két esetben
a belső és a teljes energia viszonyát a következő módon adtuk meg:

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{e} + \frac{\gamma}{2} \dot{\mathbf{v}}^2. \quad (1.47)$$

A teljes energia és belső energia fenti értelmezése megmutatja, hogy a térfogatvál-
tozási sebességet tartalmazhatja a Gibbs-reláció a többi mennyiség megfelelő értelme-
zése esetén. Ez a kérdés, tehát, hogy a sebességek termodinamikailag tárgyalandóak
és tárgyalhatóak, a legfontosabb eleme annak, hogy a mechanika termodinamikai
beágyazottságát értsük. Látni fogjuk, hogy ez kulcsfontosságú a kontinuumok mecha-
nikájában, és a relativisztikus termodinamika nehézségei is részben erre vezethetők
vissza [321]. A fenti vonatkozásban, nemrelativisztikus rendszerekre ezt a kérdést Hor-
váth tárgyalta [128].

Természetesen még sokkal többféle differenciálegyenlet is felmerülhet a közönséges
termodinamika fejlődési egyenleteként. Különösen reológiai tapasztalatok alapján ké-
zenfekvő, hogy akár még magasabbrendű időderváltakat is tartalmazhat a fajtérfogat
fejlődési egyenlete. Nyilvánvalóak a közönséges termodinamikának, mint modellesza-
ládnak a további korlátai is. A homogén rendszerek irreverzibilitásai származhatnak
inhomogenitásokból, és így az egyszerű disszipatív folyamatok – hőtranszport, sűrűlódás,
viszkózitás – közönséges termodinamikai leírása nem éri el egy kontinuumelméleten
alapuló leírás modellezési részletességét. A második, kiterjesztett modellünk láthatóan
részletesebb, mint az első, de az például, hogy a térfogatváltozás tehetetlenségét egyet-
len γ paraméterrel írjuk le biztosan nem igaz, ha ez a γ tömeg túlnyomórészt a gáz
mozgásának effektív tehetetlenségét jelenti. A termodinamikai rendszerünk alrendsze-
rekre bontása pontosíthatja a modellt. Azonban mielőtt a kontinuumok tárgyalására
térnénk át, vizsgáljuk meg a szilárd testek mechanikájának közönséges termodinami-
káját, ahol a térfogat nem megfelelő állapotváltozó.

1.5. Rugalmas anyag

Termosztatika

Míg a gázok és folyadékok kontinuumelméletének kiindulópontja a megfelelő ter-
mosztatikai Gibbs-reláció, a lokális egyensúly hipotézisével indokolva, addig a kon-
tinuummechanika általában expliciten nem alapoz a homogén termodinamikai meg-
fontolásokra. Ilyesmi legfeljebb tankönyvekben fordul elő, ahol a rugalmas anyagok
termosztatikáját általában úgy kapjuk, hogy a (1.6) Gibbs-relációban a fajlagos térfo-
gatváltozást a deformációval helyettesítik [118, 213, 325, 164]. A kontinuummechanikai

könyvek egyáltalán nem foglalkoznak homogén testekkel [288, 16, 108]. Ennek legfontosabb oka, hogy a rugalmas testek mechanikájában a homogenitás csak kivételesen teljesül, a kinematikai alapmennyiség, a deformáció, lokálisan definiált. A mechanika Truesdell, Coleman, Noll és munkatársaik által alapított racionális irányzata ezért lényegében negligálja a termosztatikában felhalmozott ismereteket a kontinuumelmélet megalapozásakor (és általában rendkívül szkeptikus a homogén testek termodinamikájával kapcsolatban) csak kontinuumokkal foglalkozik [213].

A következőkben látni fogjuk, hogy ennek ellenére a deformálható testek mechanikájában termosztatikai összefüggések aránylag könnyen felírhatóak és értelmezhetőek – az előző fejezetben vázolt termodinamikai potenciálok a fajlagos mennyiségekre a szokásos módon érvényesek maradnak – kivéve az additivitási (extenzivitási) tulajdonságot, illetve óvatosan kell bánnunk a belső energia fogalmával. Speciális esetekben (nyújtás, egyszerű nyírás) természetesen lehet homogén a deformáció. Azonban a gázok és folyadékok esetén megszokott egyszerű többi feltétel és fogalom – például környezet állapothatározók, vagy felületi hatások – ekkor sem biztos, hogy fizikailag értelmezhetőek.

A deformáció, mint fajlagos állapothatározó segítségével az entrópia definíciós formuláit általában következőképpen írhatjuk:

$$s = s(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}), \quad \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \varepsilon^{ij}} = -\frac{\sigma_{\text{sztat}}^{ij}}{T}, \quad (1.48)$$

ahol ε^{ij} kis deformáció, $\sigma_{\text{sztat}}^{ij}$ pedig a sztatikus feszültség, (1.56)-ban látunk majd rá példát. Az indexes jelölésmóddal az Einstein-konvenciót követjük, azonos indexek összegzést jelölnek. A Gibbs-reláció ennek megfelelően a következő

$$de = Tds + \sigma_{\text{sztat}}^{ij} d\varepsilon^{ij}. \quad (1.49)$$

Két fontos kérdés merül fel ezzel kapcsolatban:

1. Extenzív-e a deformáció és intenzív-e a feszültség? Egyáltalán mit is jelent az extenzivitás ebben az esetben?
2. Hogyan áll fenn az analógia a kontinuum-esettel, azaz mit jelent a viszkózus feszültség, egyáltalán létezik-e, értelmezhető-e ez a fogalom rugalmas homogén testekre?

Az első kérdés kapcsán egyrészt jól tudjuk, hogy a feszültség felületi erőkkel kapcsolatos, és természetesen a deformáció nem térfogatarányos. Vagyis kiterjedt testek esetén fel kell használnunk, hogy szilárd anyagokra egyensúlyi alakjuk is jellemző, nemcsak a térfogatuk. Az alakváltozás sűrűsége létezik, de a teljes testre felintegrált fizikai mennyiségnek csak speciális esetben lehet értelmet adni. A rugalmas test energiaváltozásait jellemző lokális hosszváltozások keverednek a lokális forgásokkal. Mivel a belső hosszváltozások által meghatározott Riemann-metrika – aminek segítségével az alakváltozás értelmezhető [89, 90] – lokálisan választja le az alakváltozásokat a forgásoktól, ezért additivitás csak speciális egydimenziós deformációk esetén lesz érvényes. Az alakváltozás extenzív, abban az értelemben, hogy létezhet a teljes termodinamikai testre történő kiterjesztése (a megnyúlás illetve a térfogatváltozás), de nem additív fizikai mennyiség. A nemadditív termodinamikai mennyiségek azonban számos esetben jól tárgyalhatóak termodinamikailag (lásd [25]).

1. Homogén testek – közönséges termodinamika

Megjegyezzük, hogy a kontinuummechanikában található termodinamikai megfontolások többnyire nem az entrópiára, hanem a Helmholtz-féle szabadenergia-sűrűségre felírt termodinamikai relációkat használják (lásd pl. [278, 108]). Ha csak mechanikai állapotváltozásokat és adiabatikus vagy izotermikus folyamatokat vizsgálunk, akkor ez valóban egyszerűsít bizonyos számításokat és formulákat (kivéve a Gibbs–Duhem-egyenlőtlenség, tehát az entrópiaprodukciónak kiszámítását), általában viszont, a mechanikai változásokat kísérő energia- és hőmérsékletváltozások teljes tárgyalásakor célszerűbb az entrópia használata.

1.5.1. Termodinamika

A dinamikai törvényt, tehát mind az energiamegmaradást, az első főtétele, mind pedig a mechanikai változó megfelelő termodinamikai változatát a kiterjesztett közönséges gáz-folyadék rendszer (1.32)-(1.33) egyenletrendszerének analógiájára kaphatjuk, ha a fajtérfogatot deformációval, a nyomást pedig feszültséggel cseréljük ki:

$$\dot{e} = q + \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}^{ij}, \quad (1.50)$$

$$\rho_A \dot{\varepsilon}^{ij} = \sigma_k^{ij} - \sigma^{ij}. \quad (1.51)$$

Itt ρ_A -t állandónak tekintjük és nevezhetjük alaktehetetlenségnek (dimenziója sűrűség \times felület). Vegyük észre, hogy a kiterjesztett közönséges gáz-folyadék, illetve a kontinuum termodinamikához hasonlóan megkülönböztettük a σ_k^{ij} 'külső feszültséget' az impulzus és munka definíciójában szereplő σ^{ij} feszültségtől és a $\sigma_{\text{sztat}}^{ij}$ sztatikus feszültségtől.

A II. főtétel, azaz a stabilitási tulajdonságok tárgyalásához tekintsünk környezetével termikus és mechanikai kapcsolatban álló termodinamikai rendszert. Ekkor az energiamegmaradás törvényében a test e illetve a környezet e_k belső energiája mellé a rendszer mozgási energiáját is hozzávesszük. Azaz feltételezzük, hogy

$$e + e_k + \frac{\rho_A}{2} \dot{\varepsilon}^{ij} \dot{\varepsilon}^{ij} = e_0 = \text{áll.} \quad (1.52)$$

Bevezetjük továbbá a 'környezet deformációját', azzal a feltételezéssel, hogy

$$\varepsilon^{ij} + \varepsilon_k^{ij} = \varepsilon_0^{ij} = \text{áll.} \quad (1.53)$$

Ez egy mesterséges feltevés, a gáz-folyadék rendszerek analógiájára. Speciális esetekben, mint például egyirányú nyújtás, viszont valóban jól értelmezhetőek fizikailag a fenti összefüggések. A külső erőből ekkor egyszerűen a felülettel történő osztással lesz külső feszültség, illetve a megnyúlás valóban csökkenti a rendelkezésre álló helyet. Viszont (1.52)-(1.53) segítségével a termodinamikai követelmények és a második főtétel a gáz-folyadék testekkel teljesen analóg módon írható és érthető és a 2.10. fejezetben látni fogjuk, hogy a rugalmas-reológiai kontinuumok esetén pontosan ezek a formulák adják – nem homogén, csak lokális, nem statikai – de termosztatikai hátteret.

A környezeti entrópiát ezek után a következő formában írhatjuk:

$$s_k(e_k, \varepsilon_k^{ij}) = \frac{e_k}{T_k} - \frac{\sigma_k^{ij}}{T_k} \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{T_k} \left(e_0 - e - \frac{\rho_A}{2} \dot{\varepsilon}^{ij} \dot{\varepsilon}^{ij} \right) - \frac{\sigma_k^{ij}}{T_k} (\varepsilon_0^{ij} - \varepsilon^{ij}). \quad (1.54)$$

Tehát a teljes rendszer entrópiatermelése, az összentrópia fenti (1.50)–(1.51) differenciálegyenletek szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} (\dot{s} + \dot{s}_k) &= \dot{s}(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}) + \dot{s}_k(\mathbf{e}_k, \varepsilon_k^{ij}) = \frac{\dot{e}}{T} - \frac{\sigma_{sztat}^{ij}}{T} \dot{\varepsilon}^{ij} - \frac{1}{T_k} (\dot{e}_k + \rho_A \dot{\varepsilon}^{ij} \varepsilon_k^{ij}) + \frac{\sigma_k^{ij}}{T_k} \dot{\varepsilon}^{ij} = \\ &= \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) q + \frac{1}{T} \varepsilon^{ij} (\sigma^{ij} - \sigma_{sztat}^{ij}) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Ezzel a homogén, kis deformációs közeg termodinamikájának kulcspontjait megadtam. Az (1.50)–(1.51) differenciálegyenletek, együtt az anyag statikai tulajdonságait meghatározó entrópiafüggvénnyel, továbbá a q , σ^{ij} kölcsönhatási függvényeket az entrópiatermelés egyenlőtlenségét kielégítően megadva az egyenletrendszerünk zárul, és az egyensúly aszimptotikus stabilitása, a második főtételek teljesül.

1.5.2. Lineárisan hőtáguló homogén rugalmas viskoelasztikus test

Ebben a fejezetben a termorugalmasság példáján keresztül megadunk egy teljes statikus és kölcsönható állapotfüggvény-rendszert a hozzá tartozó dinamikai törvénnyel együtt.

A termorugalmasság Duhamel–Neumann-törvénye (pl. [108]) a térfogati hőtágulást a következő deformáció- és hőmérsékletfüggő sztatikus feszültség segítségével vezeti be:

$$\sigma_{sztat}^{ij} = 2\mu \varepsilon^{ij} + \nu \varepsilon^{kk} \delta^{ij} - \alpha(3\nu + 2\mu)(T - T_0) \delta^{ij}. \quad (1.56)$$

Itt μ és ν a Lamé-állandók, α a lineáris hőtágulási tényező, δ^{ij} a Kronecker delta, T_0 pedig állandó referencia hőmérséklet. Ehhez a sztatikus feszültséghez a következő entrópiafüggvény segítségével jutunk:

$$s(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}) = \alpha(3\nu + 2\mu) \varepsilon^{ii} + c \ln \left(\frac{\mathbf{e} - \mu \varepsilon^{ij} \varepsilon^{ij} - \frac{\nu}{2} (\varepsilon^{ii})^2 - \alpha(3\nu + 2\mu) \varepsilon^{ii} T_0}{\mathbf{e}_0} \right), \quad (1.57)$$

ahol \mathbf{e}_0 egy állandó fajlagos energia érték, c pedig az izodeformációs fajhő. Valóban, (1.48) első formulája szerint a hőmérsékletet ebből könnyen megkaphatjuk:

$$T(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}) = \frac{1}{c} \left(\mathbf{e} - \mu \varepsilon^{ij} \varepsilon^{ij} - \frac{\nu}{2} (\varepsilon^{ii})^2 - \alpha(3\nu + 2\mu) \varepsilon^{ii} T_k \right), \quad (1.58)$$

és az entrópia deformáció szerinti parciális deriváltjából (1.48) és az előző formula alapján kapjuk az (1.56) Duhamel–Neumann-törvényt. A fenti entrópiafüggvény konkv, ha a fajhő és a rugalmassági együtthatók pozitívak.

A kölcsönhatást jellemző állapotfüggvényeket, az úgynevezett konstitutív egyenleteket az entrópiatermelés egyenlőtlenségének segítségével kaphatjuk meg a nemegyensúlyi termodinamika módszertana szerint. Termodinamikai erőket és áramokat azonosítunk, és ezek közötti függvénykapcsolatok segítségével az egyenlőtlenséget megoldjuk. A legegyszerűbb és a gyakorlatban legfontosabb megoldásokat akkor kaphatjuk, ha a szóban forgó függvényeket differenciálhatónak és Taylor-soruk első tagjaival közelíthetőknek tételezzük fel, hasonlóan a rugalmasságtanhoz. Jelen esetben az entrópiatermelés termikus és mechanikai kölcsönhatásra vonatkozó tagok összege:

$$\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) q + \frac{1}{T} \varepsilon^{ij} (\sigma^{ij} - \sigma_{sztat}^{ij}) = X_T J_T + X_M J_M \geq 0. \quad (1.59)$$

1. Homogén testek – közönséges termodinamika

A T hőmérséklet és a $\sigma_{\text{sztat}}^{ij}$ sztatikus feszültség az állapothatározók adott függvénye (az entrópia deriváltjaként esetünkben). Ugyancsak az állapothatározók egyike a deformáció időderiváltja. A q fajlagos hőátadás határozatlan, ugyanúgy a σ^{ij} feszültség is. Azaz a fenti egyenlőtlenségben ez utóbbiak alakjára vonatkozóan kapunk megszorítást. Termodinamikai terminológiát használva azt mondhatjuk, hogy erőket és áramokat vezetünk be. Azonban az erő és áram szétválasztása nem önkényes – de persze nem is teljesen meghatározott (lásd részletesebben a kontinuumok esetén a következő fejezetben). Az erő egy, az állapotterén értelmezett függvény, az áram pedig határozatlan függvény, vagyis ilyen módon lehet akár az erő függvénye is. Jelen esetben érdemes a következő módon meghatározni a termodinamikai erőket és áramokat:

	Termikus	Mechanikai
Erő	$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k}$	$\frac{\dot{\varepsilon}^{ij}}{T}$
Áram	q	$\sigma^{ij} - \sigma_{\text{sztat}}^{ij}$

(1.60)

Vegyük észre, hogy a mechanikai kölcsönhatáshoz tartozó termodinamikai áram – azaz a statikus és dinamikai feszültség különbsége – mechanikailag erő jellegű. Ez utóbbi megállapítás ugyan szokatlannak tűnik, de világos, ha arra gondolunk, hogy feszültség, illetve a nyomás, az impulzus árama (lásd pl. (2.176)). Az entrópia növekedése izotrop esetben legegyszerűbben a következő konstitutív függvényekkel biztosítható:

$$q = \Lambda \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) = -\Lambda_N (T - T_k), \quad (1.61)$$

$$\sigma^{ij} - \sigma_{\text{sztat}}^{ij} = 2\eta T \dot{\varepsilon}^{ij} + \eta_v T \dot{\varepsilon}^{kk} \delta^{ij}. \quad (1.62)$$

Itt $\Lambda_N = \Lambda/(TT_k)$ a Newton-féle hőátadási együtthatót. Megjegyezzük, hogy alacsony hőmérsékleten jelentősége van annak, hogy a reciprokok hőmérsékletek különbsége, nem pedig a hőmérséklet-különbség a termodinamikai erő. Feltételeztük továbbá, hogy a rugalmas anyag izotrop, η és η_v a nyíró és a térfogati viszkozitást jelöli.

Tehát összességében az (1.50) energiamérlegben és a deformációra vonatkozó az (1.51) egyenletben (az impulzusmérlegben) az (1.59) entrópiaprodukció (azaz a disszipációs egyenlőtlenség) segítségével a hőátadás (1.61) és a viszkozításra vonatkozó (1.62) kölcsönhatási függvényekre jutottunk. A hőtáguló rugalmas anyag (1.56) sztatikus feszültségére és (1.58) hőmérsékletére vonatkozó állapotfüggvényekkel együtt megkaptuk a hőtáguló, ideálisan rugalmas viszkózus termodinamikai test homogén fejlődési egyenleteit. A rugalmas-viszkózus testet Kelvin-testnek nevezi a reológia (hőtágulás nélkül), 2.10. alfejezetben megadom, hogyan kapható meg ettől általánosabb reológiai testek rendszere az itteniekhez hasonló termodinamikai megfontolásokkal, de kontinuumokban.

1.6. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a kontinuumok termodinamikájának előkészítéseként a homogén testek nemegyensúlyi termodinamikáját mutattam be. Ésszerű differenciálegyenleteket láttunk a termodinamikai mennyiségek időbeli változásának jellemzésére. Kiderült

továbbá, hogy a második főtétele értelmezhető az egyensúly aszimptotikus stabilitására vezető feltételrendszerként gázok és folyadékok, illetve rugalmas testek esetén is. Ennek legfontosabb elemei az entrópia létezése, mint a megfelelő intenzív állapotváltozók potenciálja; az entrópia konkávitása, azaz a termodinamikai stabilitás; és az összentrópia növekedése a differenciálegyenlet megoldásai mentén, azaz az entrópia-termelés nemnegatív volta. Ez utóbbi feltétel lehetővé teszi a dinamikai tulajdonságokra vonatkozó konstitutív függvények meghatározását a nemegyensúlyi termodinamika kontinuumelméletében megszokott módon.

2. Kontinuum-termodinamika

"A theory is the more impressive the greater the simplicity of its premises is, the more different kinds of things it relates, and the more extended is its area of applicability. Therefore the deep impression which classical thermodynamics made upon me. It is the only physical theory of universal content concerning which I am convinced that, within the framework of the applicability of its basic concepts, it will never be overthrown."

Albert Einstein

2.1. Bevezetés – történeti megjegyzések

2.1.1. Alapelvek

A nemegyensúlyi termodinamika térelméletében is a második főtétel értelmezése és használata az egyik kulcskérdés. A homogén testek esetében láttuk, hogy annak fizikai tartalma az anyag stabilitása, pontosabban a fejlődési egyenletek egyensúlyának aszimptotikus stabilitása. A kontinuumelméletek esetén ezek alapján minimálisan elvárható, hogy a termosztatikai határesetnek megfelelő homogén egyensúlyi állapot aszimptotikusan stabil legyen, csak és egyedül termodinamikai feltételek következtében. Általában ennek matematikai vizsgálata nehéz, de szükséges feltétele, hogy a linearizált egyenletekre ugyanez igaz legyen. Ezt a követelményt, azaz a homogén egyensúly lineáris aszimptotikus stabilitását *generikus stabilitás*nak fogjuk hívni a továbbiakban. Az elnevezés a speciális relativisztikus hidrodinamikából származik, ahol a generikus stabilitás a megfelelő alapegyenletek egyik kiválasztási kritériuma [122] (lásd a 3. fejezetet).

A kontinuumelméletek specialitása a második főtétel konstruktív használata. Az entrópiaprodukció egyenlőtlensége a benne szereplő anyagfüggvények megfelelő formája miatt teljesül. Ilyen anyagfüggvények például a klasszikus irreverzibilis termodinamika erő-áram konstrukciójával kaphatók. Természetesen ez a második főtétel egy értelmezését jelenti: nem folyamatokra vonatkozó megszorításként, hanem az anyag tulajdonságaként értendő (Coleman-Mizel-, illetve Muschik-Ehrentraut-értelmezés [47, 241]). A továbbiakban a második főtétel konstruktív használatának lehetőségeit és feltételeit elemezzük, ennek az értelmezésnek a segítségével.

A kontinuumok második alapkérdése a második főtételen túl az objektivitás kérdése. Ez alatt az értendő, hogy az anyagot jellemző konstitutív függvények, illetve az egész elmélet független legyen a vonatkoztatási rendszertől.¹

¹ Az objektivitást más területeken kovarianciának hívják.

Ebben a fejezetben megmutatom, hogy az alapelvek pontosításával a nemegyensúlyi termodinamika alkalmazhatósága jelentősen kibővíthető. Egyrészt bemutatom, hogy az objektivitás hagyományos megfogalmazása rossz, és példát adok a javítására. Ezután megmutatom a második főtétel konstruktív alkalmazásának megfelelő módját gyengén nemlokális kontinuumok esetén. Bevezető példaként a Ginzburg-Landau-egyenlet termodinamikai származtatása, illetve a klasszikus irreverzibilis termodinamika szerepel. Ezután a konstrukciós módszer további alkalmazásaként duális belső változók és az egykomponensű hővezető folyadékok következnek. Más jellegű tanulságokat jelent az ezután bemutatott hővezetési egyenlet egy gyengén nemlokális általánosítása, illetve a rugalmasságtan és reológia termodinamikai belső változókra épített tárgyalása.

A fejezetben ismertett módszer és alkalmazásai saját kutatási eredmények, eredeti megjelenésükre az egyes alfejezetek címében hivatkozok.

2.1.2. Gyökerek és irányzatok: klasszikus, racionális és kiterjesztett

A nemegyensúlyi termodinamika Lars Onsager munkáival kezdődött [251, 252]. Onsager fő érdeme, hogy a statisztikus megfontolásokkal felismerte és bizonyította, hogy a különböző makroszkopikus transzportok között a reciprocitási relációk formájában szoros kapcsolat van. Az elmélet kontinuum része, azaz a mérlegegyenletekből az entrópiaprodukciónak származtatása és a termodinamikai erők és áramok közötti kapcsolat kontinuum tárgyalása Eckart nevéhez köthető [64, 65, 66, 67], aki egyúttal a relativisztikus disszipatív folyadékok elméletét is megalapozta ezzel a módszerrel (erről bővebben az 5. fejezetben). A lokális egyensúly hipotézisének alapuló *klasszikus irreverzibilis termodinamikát* ezután Prigogine és de Groot könyvei foglalták össze először, és de Groot és Mazur monográfiája adja máig egyik legjobb áttekintését [263, 103, 104].²

Ezzel párhuzamosan Clifford Truesdell a klasszikus kontinuummechanika és fizika új irányzatát indítja el *racionális mechanika* néven. 1956-ban megalapítja az Archive for Rational Mechanics and Analysis címmel az irányzat vezető folyóiratát és 1965-re, több, mint 10 évi munka után megjelenik Walter Noll-al közösen írt könyvük, a racionális kontinuummechanika alapműve "Non-linear Field Theories of Mechanics" címmel [291]. Ebben a könyvben a második főtétel, illetve a termodinamikai megfontolások a mechanikai konstitutív elmélet kihagyhatatlan részét képezik. A racionális jelző arra utal, hogy Truesdell és követői a matematika részének tekintik a mechanikát és módszertanuk, vizsgálati módszereik ennek megfelelőek. A racionális irányzat alapelveket azonosított és a második főtételt, illetve az objektivitás elvét több szempontból is kimerítően vizsgálta.

A termodinamika, és különösen a nemegyensúlyi termodinamika többszintű kihívást jelent mindenki számára, aki egységes alapelveket szeretne látni a fizikában.

² Nem Onsager, nem Meixner és nem Prigogine, hanem Eckart a nemegyensúlyi termodinamika megalapozója. Onsager egy fontos textitstatisztikus fizikai megfigyeléssel adott magyarázatot a *homogén* rendszerek közötti együtthatókra [251, 252]. A kontinuum vezetési együtthatók közötti viszonyokra Meixner és Prigogine alkalmazta Onsager elméletét (mellesleg nem igazán meggyőzően, az Onsageri reciprocitási relációk származtatása nemegyensúlyi viszonyok között a kinetikus elméletből ma is vizsgált terület, lásd pl. Sharipov munkáit [272, 273, 274, 275, 276]). Eckart nem maradt ezen a területen, valószínűleg ezért nem kapta meg a megérdemelt elismerést [233]. A tekintélyes pályatársak félrevezető (szándékosan kisebbitő?) megjegyzései biztosan sem segítették ezt elő [286].

Ennek egyik, jól ismert oldalát jelentik a mechanika ismételt kísérletei arra, hogy a disszipáció eredetét megmagyarázza abból az alapfeltevésből, hogy a fizika törvényei mikroszkopikus szinten nemdisszipatívák (lásd például [193, 180, 178]). A másik, szintén jól ismert kérdéskör, hogy a nemegyensúlyi termodinamika disszipatív mozgásegyenleteit (Fourier hővezetési egyenletét, vagy a Navier–Stokes-egyenletet) variációs elvek segítségével lehet-e származtatni [338]. Számos javaslat létezik erre, de a mechanika Hamilton elvétől eltérő ötletek (például a két legérdekesebb [113, 250]) nem terjedtek el. A nemegyensúlyi termodinamika a mozgásegyenletek és anyagfüggvények lehetséges eredetére nézvést megszorítást jelent és ennek kihasználásával a származtásukra módszert ad. Legyenek a fizika törvényei olyanok, hogy a második főtételnek – az entrópiánövekedés törvényének – megfeleljenek. Ezt a problémát az irreverzibilis termodinamika konstruktívan oldja meg: az anyagtörvényeket *megkapjuk* az entrópiaprodukción egyenlőtlenségének egy megoldásaként. A kérdés az, mennyire általános és általánosítható ez a módszer? A termodinamika második főtétele mennyit segít új fizikai törvények felírásában? A kihívások régóta jelen vannak: a hővezetés számos differenciálegyenlete, például a Guyer-Krumhansl-egyenlet a Fourier-törvény kiterjesztései, még sincs közük a termodinamikához. A Ginzburg-Landau- és a Cahn-Hilliard-egyenletek a fizika számos különböző területén bukkannak fel, mint általános struktúráképző egyenletek – félig meddig termodinamikai megfontolásokra alapozva. A mechanikába a Cosserat fivérek bevezetik a hiperkontinuumokat, világos fizikai jelentésű, belső struktúrális hatásokat leíró változókkal kiegészítve a mechanikát [50]: a mozgásegyenleteit a rugalmasságtan analógiájára alapozzák. Ha a nemegyensúlyi termodinamika a klasszikus kontinuumok általános elmélete, akkor a rendszerébe legalábbis be kell tudni illeszteni ezeket az elméleteket, de méginkább – az egységes elveknek köszönhetően és a második főtétel kényszerítő erejénél fogva – kiterjesztésükre és általánosításukra is módszert kell adjon.

1960-as évek vége és 70-es évek eleje különösen érdekes a fenti problémakör szempontjából, mert ekkor válik nyilvánvalóvá, hogy az anyagtörvények nemcsak függvények, hanem differenciálegyenletek is lehetnek. Tehát a klasszikus kontinuumfizika kiterjeszthető, és kiterjesztéséhez a termodinamika második főtétele a kulcs. Ehhez az első fontos lépést az irreverzibilis termodinamikai oldalról Onsager és Machlup munkái jelentik, ahol a tehetetlenség hatását veszik figyelembe egyszerű esetekben [253, 194]. Másik fontos lépés a racionális oldalról Coleman és Gurtin munkája a belső változók bevezetéséről [46]. Ezzel párhuzamosan Ingo Müller felveti a termodinamika kiterjesztésének gondolatát [227, 228, 230]. Érvelése egyrészt fizikai: a parabolikus egyenletek végtelen jelterjedési sebessége ellentmond a relativitáselmélet univerzális véges terjedési sebességének. Másrészt matematikai: parabolikus egyenletek helyett hiperbolikus egyenletek kell leírják az igazi fizikai törvényeket.³ Mindkét gondolat nagyon fontos szerepet játszik a nemegyensúlyi termodinamika további fejlődésében. Ugyanez az időszak, amikor a racionális termodinamika háborút hirdet a fizikaibb irányzat ellen: megjelenik Truesdell könyve a termodinamikáról [289], vitriolos kritikával az irreverzibilis termodinamika minden nem pontos fogalma és állítása ellen. Például a termodinamikai erő és áramok kiválasztásának módjával kapcsolatban ezt írja:

³Ez a gondolat Hadamard-tól származik. Szerinte a fizika feladatai matematikailag korrekt kitűzésű problémák kell legyenek.

„What this theorem is, we may have some difficulty in divining, since the terms „interact” and „couple” do not occur in algebra and are never defined by Onsagerists, although they do occur frequently in *The Arabian Nights*.”

Truesdell ezzel máig hatóan megosztja a nemegyensúlyi termodinamikát. Prigogine Nobel-díját érő bírálatoknak ez a, számos szempontból jogos, kritikája ad alapot. Viszont vannak olyan kérdések, amiben irányzata téved. Látni fogjuk, hogy ilyen például az objektivitás, vagy a gyengén nemlokális elméletek elvetése. Követői, az egész racionális iskola azóta sem képes a fizikai alapok újragondolására (lásd pl. [277, 108]).

Ennek megfelelően az Ingo Müller által elindított kiterjesztett termodinamikának egyből két iskolája is születik, a *racionális kiterjesztett termodinamika* és az *irreverzibilis termodinamikából* kinövő *kiterjesztett irreverzibilis termodinamika*. Mindkét irányzat a kinetikus elméletben keresi megalapozásának módját, a momentum-sorfejtéses formával feltétlen kompatibilitást keres, és ezért alapfeltevésként használja, hogy

- csak lokális elmélet megengedett,
- a változók fejlődési egyenletei csak mérleg formájúak lehetnek,
- új változók csak az előző változók áramai lehetnek.

Ennek megfelelően megmagyarázza az elsődleges motivációul szolgáló Maxwell–Cattaneo–Vernotte-egyenlet [221, 37, 328] termodinamikai hátterét, de már nem tudja beilleszteni rendszerébe a gyengén nemlokális Guyer–Krumhansl-egyenletet [110, 58, 177, 234].

A nemegyensúlyi termodinamika magyar művelői és képviselői közül Fényes Imre sztatikai variációs elve, a le Chattellier–Braun-elv és a termodinamikai stabilitás kapcsolata és a homogén rendszerek nemegyensúlyi termodinamikája kapcsán említendő [78]. Részben ő motiválta a nemegyensúlyi termodinamikai megalapozású reológiai-közetmechanikai kutatásokat is [7, 8]. Gyarmati István variációs elve és a klasszikus térelmélet kifejtése [113] révén, illetve munkatársai ehhez kapcsolódó munkásságával a hazai kutatásokat a nemzetközi élvonalba emelte.⁴ A termodinamika hullámelmélete pedig a kiterjesztett irreverzibilis termodinamikának adott új alapokat [115].⁵

2.2. Objektivitás

2.2.1. Történet: objektivitás és anyagi objektivitás

A fizika törvényei függetlenek a leírásukra használt vonatkoztatási rendszerektől. Ennek az állításnak az értelmezésére, pontos megfogalmazására vonatkozó vizsgálatok vezettek a speciális és az általános relativitáselmélet mai megfogalmazásához.

A klasszikus, nemrelativisztikus kontinuumfizikának is ez az egyik alapja. Itt a fenti színt „filozófiai” megfogalmazás majdnem általánosan elfogadott: kevesen kételkednek komolyan abban, hogy a rugalmas anyag ugyanúgy kell viselkedjen akkor is, ha

⁴ A 60-as évek végének tudományos életében zajló, fentebb említett nemzetközi harcaival párhuzamosan Magyarországon is ekkoriban veszett össze a nemegyensúlyi termodinamika két legtekintélyesebb hazai kutatója, Fényes Imre és Gyarmati István.

⁵ Az általánosított Gibbs-reláció helyett hőáramsűrűségtől függő entrópiafüggvényt javasol. Ez a konzekvensebb megalapozás azóta beépült az elméletkörbe [154].

egyenes vonalban elhaladok mellette, vagy ha keringek körülötte. Ennek megfelelően az ilyen irányú vizsgálatok is nagyon régiak. A kontinuumfizika első általános elmélete a mechanikát, reológiát, kémiát, hővezetést együtt tárgyaló elmélet [137], amely már az energia- és entrópiamérleget is tartalmazza, attól a Jaumanntól⁶ származik, aki – nemrelativisztikus kereteken belül – vizsgálta a vonatkoztatásirendszer-függetlenséget is. Az együttforgó objektív időderivált máig az ő nevét viseli. A kérdéskör további történetét 1965-ig bezáróan kimerítően tárgyalja Truesdell és Noll [291], az azt követő történetet pedig Frewer [81]. Az objektivitás Walter Nolltól származó, általánosan elfogadott definíciója szerint objektív egy fizikai mennyiség, ha merev megfigyelők ugyanolyannak látják [245].

A vonatkoztatási rendszertől való függetlenség alapvetően háromféle módon jelentkezik klasszikus kontinuumfizikában.

1. Építünk rá az alapváltozók kiválasztásában. Az objektív fizikai mennyiségek megállapítása már *kinematikai* szinten sem triviális a kontinuummechanikában. Például a rugalmasságtanban végtelen számú deformáció-, illetve alakváltozás-fogalmat lehet bevezetni, de ezek közül a Noll-féle transzformációs objektivitás-definíció kitüntet egy szűk családot (a jobb Cauchy-Green deformáció gyökét szokás ezek közül használni).
2. Felhasználjuk az anyagfüggvényekben szerepet kapó változók behatárolására. Alapvetően azt várjuk, hogy ezek objektív mennyiségek. Ezért például a Noll-féle objektivitási elv kizárja, hogy az anyagfüggvények a sebességtől függhessenek. Mivel az anyagfüggvények főleg az alapváltozók deriváltjaitól függhetnek, ezért kiemelten fontos az *objektív időderiváltak* megtalálása. A térderiváltak objektívek általában, és ezért speciálisan a Noll-féle definíció értelmében is, ezért ezekről nem szoktak beszélni külön. Amennyiben az anyagi eredetű evolúciós egyenleteket (pl. Maxwell-Cattaneo-Vernotte) speciális, deriváltakat tartalmazó anyagfüggvényként fogjuk fel, úgy maguknak a fejlődési egyenleteknek az objektivitása is kérdéses.
3. Végül elvárjuk az anyagfüggvények objektivitását is, amit külön elnevezéssel *anyagi objektivitás elvének* nevezve kiemelten kezel a racionális termodinamikai iskola.

Az első két kérdésben a Noll-féle megfogalmazás és definíció nagyjából elfogadott. A harmadik kérdés, az anyagi objektivitás elve viszont máig vitatott, számos egymásnak ellentmondó megfogalmazása létezik a szakirodalomban [239, 242, 279, 185, 236, 237, 186, 20, 282, 191, 42, 81]. Az evidens szóbeli állítás és a Noll-féle matematikai megfogalmazás közötti ellentmondásokat jól összefoglalja Ryskin cikke [268]. Noll maga is több ízben próbálta pontosítani az elvet, legutóbbi javaslata például implicit módon affin tereket vezet be a téridőbe [246, 247, 248]. Az elv következményei nagyon

⁶Ez nem egészen véletlen. Jaumann Gusztáv (magyar? fizikus) Mach asszisztense volt. Érdekesen tanulságos, hogy 1911-ben Einsteinnel együtt pályázott a Prágai Egyetem professzori székére. Miután kiderült, hogy az egyetem első jelöltje Einstein, Jaumann visszavonta pályázatát a következő indoklással: *"If Einstein has been proposed as the first choice because of the belief that he has greater achievements to his credit, then I will have nothing to do with a university that chases after modernity and does not appreciate merit."* Einstein sem kapta meg a katedrát [130, 233].

szerteágazóak és a megfogalmazás hiányosságai súlyos fizikai állításokat eredményeznek. Egyik ilyen fontos kijelentés szerint például a kinetikus elmélet nem objektív [231, 233].

Azonban az objektív fizikai mennyiségek kiválasztására szolgáló Noll-féle definíciónak két szembetűnő hiányossága van:

- Csak merev megfigyelőkre vonatkoztatott invarianciát követel meg. Elvárható, hogy egy Hooke-törvény például mindenféle megfigyelő számára ugyanazt a fizikai tartalmat jelentse.
- Egy szembetűnően négydimenziós téridő-transzformációt szűkít le három dimenzióra. Egyáltalán nem általánosítható relativisztikus kontinuumokra.

Az objektivitás másféle megfogalmazására és kezelésére több javaslat is van (például Mariano általános transzformációkra javasol invarianciát [197]). Ezek közül talán a legelterjedtebb az anyagi sokaság fogalmának bevezetése [215, 213].

2.2.2. A Noll-féle definíció kritikája

⁰ A továbbiakban röviden bemutatom, hogy Noll saját transzformációs definíciójából [245] másfajta objektivitás-fogalom következik, mint ami az irodalomban elterjedt. Az inerciális és merev megfigyelőket két megfelelő vonatkoztatási rendszer közötti transzformációs tulajdonsággal írjuk le. Jelöljük az egyik és a másik vonatkoztatási rendszerben ugyanazt az időpontot és helyzetet (t, x^i) -el, illetve (t', x'^i) -vel, ahol $i \in \{1, 2, 3\}$. Ha a két vonatkoztatási rendszer egymáshoz képest merev mozgást végez, a következő transzformációs szabállyal térhetünk át az egyik koordinátáiról a másik koordinátáira:

$$t' = t, \quad x'^i = h^i(t) + Q_j^i(t)x^j, \quad (2.1)$$

ahol $h^i(t)$ a két középpont relatív helyvektora, $Q_j^i(t)$ pedig a forgást leíró másodrendű ortogonális tenzor. A merev megfigyelő középpontjának mozgása és a forgása is időfüggő. Az objektivitás Noll-féle megfogalmazása szerint egy fizikai mennyiség objektív, ha a fenti szabálynak megfelelően transzformálódik. Mivel az idő abszolút, nem transzformálódik, ezért csak a második formulát, mint térből-térbe történő leképezést tekintik, és ennek Jacobi-mátrixa alapján transzformálnak. A szokásos érvelés szerint ezek után a helyzet objektív, a relatív sebesség viszont például nem az, mert

$$v'^i(t) = \frac{d}{dt}x'^i(t) = \frac{d}{dt}h^i(t) + \frac{d}{dt}(Q_j^i(t)x^j(t)) \neq Q_j^i(t)\frac{d}{dt}x^j(t).$$

Noll fenti, (2.1) objektivitás-transzformációját célszerű a következő formába átírunk:

$$x'^0 = x^0, \quad x'^i = h^i + Q_j^i x^j; \quad \text{röviden} \quad x'^a = x'^a(x^b), \quad (2.2)$$

ahol $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ és Einstein megállapodását használom az azonos indexek összeejtésére. Itt is, mint az előbbiekben, felső és alsó indexekkel a kontra- és kovariáns (illetve a vektor- és kovektor-) komponenseket különböztetjük meg. A

⁰ Ez a fejezet a [209] publikáción alapul.

differenciálgeometriából jól ismert (lásd pl. [39]), hogy c^a egy négydimenziós objektív vektor, ha vonatkoztatási rendszer váltásnál a transzformációs szabálya

$$c'^a = J'^a_b c^b, \quad \text{ahol} \quad J'^a_b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \quad (2.3)$$

a transzformáció Jacobi-mátrixa.

Jelen esetben ez a következő blokkmátrix formába írható:

$$J'^a_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dot{h}^i + \dot{Q}^i_j x^j & Q^i_j \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Ennek megfelelően egy (c^0, c^i) négyesvektor objektív, ha

$$\begin{pmatrix} c'^0 \\ c'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dot{h}^i + \dot{Q}^i_j x^j & Q^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^0 \\ c^i \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

azaz

$$c'^0 = c^0, \quad c'^i = (\dot{h}^i + \dot{Q}^i_j x^j) c^0 + Q^i_j c^j. \quad (2.6)$$

Ha a négyesvektor térszerű, azaz $c^0 = 0$, akkor visszakapjuk a szokott összefüggést:

$$c'^i = Q^i_j c^j, \quad (2.7)$$

általában azonban nem, mivel számos fontos fizikai mennyiség nemrelativisztikusan is négyesvektor. Például tekintsük egy tömegpont mozgását leíró, egy t időponthoz az r^i helyzetet rendelő függvényt. Ezt egy időt is magában foglaló leírásban a $(t, r^i(t))$ négyesvektorral adhatjuk meg (adott vonatkoztatási rendszerben). Ennek időderiváltja $(1, v^i)$, ahol $v^i = \dot{r}^i$. Ekkor (2.2) alapján

$$r'^i = h^i + Q^i_j r^j,$$

ezért

$$v'^i = \dot{h}^i + \dot{Q}^i_j r^j + Q^i_j \dot{r}^j.$$

Tehát (2.6) alapján láthatjuk, hogy az

$$u^a = (1, v^i) \quad (2.8)$$

egy objektív mennyiség a Noll-féle értelemben. A szokásos hármass sebesség, $(0, v^i)$ nem objektív.

A fenti egyszerű gondolatmenet azt mutatja, hogy a vektorokra, kovektorokra és másodrendű tenzorokra vonatkozó részletes transzformációs szabályok ezek után újragondolhatóak, csak figyelembe kell vennünk, hogy a nemrelativisztikus téridőt nem lehet egyszerűen tér és idő Descartes-szorzataként modellezni. Ezen kívül elvárható, hogy az objektivitás ne csak merev, hanem tetszőleges vonatkoztatási rendszerek között is fennálljon. Ezt a vizsgálatot a nemrelativisztikus téridő egy olyan matematikai modelljében lehet elvégezni, ahol a fizikai mennyiségeket és fizikai törvényeket vonatkoztatási rendszertől és megfigyelőtől *függetlenül* definiálhatjuk [198, 201]. Erre

alapozva az A függelékben vázlatosan ismertetem a legegyszerűbb ilyen nemrelativisztikus téridőmodellt és levezetem skalár, vektor, kovektor, tenzor, kotenzor és vegyes tenzor jellegű mezők deriváltjainak transzformációs tulajdonságait.

Megjegyzendő, hogy anyagi sokaságok bevezetése és (lényegében) téridő alapú tárgyalása önmagában nem elegendő, elsősorban azért, mert az anyagi sokaság feltételezi, hogy a kontinuumnak van egy idealizált, relaxált, feszültségmentes alapállapota, amit egy referencia időpontban fel is vesz. A gyakorlatban ez csak kivételesen lehet igaz, és végső soron nem is kell ezt feltételeznünk [89, 90].

Ebben a részben tehát feltártuk Noll definíciójának hibáit [209], és megmutattuk, hogy a teljes téridőt figyelembe véve hogyan lehet javítani rajta. Ezáltal a nemegyensúlyi termodinamika konstitutív elméletében új modellalkotási lehetőségek tárultak fel. A továbbiakban a fenti objektivitásfogalomnak elsősorban két következményét fogjuk felhasználni:

- A négyessebesség objektív, ezért lehetnek sebességfüggő anyagfüggvények.
- A térbeli deriváltak objektívek (mert négyes kovektorok), ezért a térbeli gyengén nemlokális kiterjesztései a termodinamikának problémamentesek objektivitási szempontból.

2.3. Gyenge nemlokalitás időben és térben

2.3.1. Történet: túl a lokális egyensúlyon

A racionális termodinamika megpróbálta teljes általánosságban megfogalmazni a idő- és térbeli nemlokalitást: memóriafunkcionálokra építkező és nemlokális elméleteket állított fel. Ez az úgynevezett *erős nemlokalitás* irányzat gyakorlati szempontból kudarnak tekinthető; túlságosan általános a konstitutív elmélet, hogy a kísérleteknek támpontot adjon (lásd pl. [255, 213]).

Az alternatív stratégia szerint olyan konstitutív függvényeket keresünk, amelyek az alapváltozóknak a klasszikus elméletekben megjelenőnél magasabb rendű tér- és időderiváltjaitól függhetnek. Speciálisan fontos esetet jelentenek a belső változók, ahol az evolúciós egyenletek is konstitutívnak tekinthetők.

A gyenge nemlokalitás ötletének is mély történeti gyökerei vannak. Az *időbeli gyenge nemlokalitás* és a Hooke-törvény magasabb rendű időderiváltakkal történő kiegészítése számos anyag viselkedésének magyarázatát adja a reológiában, a folyékony és szilárd viselkedést egyaránt mutató anyagok tudományában⁷. Legegyszerűbb modelljei nem véletlenül viselik Maxwell-, Kelvin- és Poynting–Thomson-test nevet.

Ugyancsak régóta léteznek a deformáció térderiváltjaitól függő feszültségeket alkalmazó mechanikai elméletek (másod- és magasabbfokú folyadékok és rugalmasságtan), ezek legismertebb példáját jelentik a Van der Waals kapillaritáselméletét általánosító úgynevezett Korteweg-folyadékok [161, 320]. Gyenge nemlokalitás alatt legtöbbször a térbeli gyenge nemlokalitást szokás érteni.

A termodinamikai kompatibilitás vizsgálatához gyenge nemlokalitás esetén megfelelő módszerekre van szükség. Az irreverzibilis termodinamika heurisztikus erő-áram-

⁷ A reológia létéről azért kényelmes elfelejtkezni, mert különben meg kellene igazán gondolni, mi is a halmazállapot...[165, 166, 167]

módszere nem működik ebben az esetben minden további nélkül. Két olyan módszertan alakult ki, amely a termodinamikai követelményeket figyelembe veszi: a racionális és a GENERIC.

A racionális mechanika kényszerfeltételes függvényegyenlőtlenségek vizsgálatára a Coleman–Noll-eljárást [49] vagy a Liu-eljárást [188] a második főtétele Coleman–Mizell-féle értelmezésével [48, 241] együttesen alkalmazza. Ez utóbbi szerint a második főtétel anyagi tulajdonság, azaz az anyagfüggvények (hőáram, feszültség) formája kell biztosítsa Gibbs–Duhem-egyenlőtlenség érvényességét (a racionálisok nem szeretik az entrópiaprodukciót), minden egyéb feltétel, például a mérlegek, mint kényszerek figyelembe vételével. A Coleman–Noll- és a Liu-eljárások módszert adnak a feltételes függvényegyenlőtlenség megoldására. A viszonyuk olyan, mint a feltételes szélsőérték-problémák esetén a direkt behelyettesítés és a Lagrange-szorókat használó módszerek viszonya, a Coleman–Noll-eljárás a kényszereket behelyettesítve keresi a megoldás feltételeit, a Liu-eljárás pedig multiplikátorokkal veszi figyelembe a kényszereket. A két módszer lényegében ekvivalens [287].

A racionális módszertan több fontos eredményre vezetett [63, 99, 33], viszont szembevető hiányosságai is vannak. Például Coleman–Noll-eljárással kapott egyik első eredmény az, hogy a második főtétel szerint a rugalmasságtan csak lokális lehet, a feszültségtenzor nem függhet a deformáció gradiensétől [106], illetve elvileg nemlokális képlékenységi sem létezhetne [1]. Ezek a megállapítások jó ideig irányt szabtak és szabnak ma is a rugalmasságtan és a képlékenységtan fejlődésének (pl. a Fleck–Hutchinson-elmélet csak 2001-ben született meg és Gurtin is csak ezután talált egy módszert saját negatív eredményének megkerülésére [107]). A racionális módszertan másik fontos hiányossága, hogy nem képes az időbeli nemlokalitások kezelésére (első-sorban az objektivitás hiányos megértése miatt).⁸ Hasonló problémát jelent a belső változók fejlődési egyenleteinek gyengén nemlokális kiterjesztése. Itt csak további elvek (mikroerő-mérleg, intersticiális-munka) bevezetésével lehet megkerülni azokat a második főtétel szigorú alkalmazásából származó feltételeket amelyek csak közönséges differenciálegyenleteket eredményeznek a belső változók fejlődési egyenleteként [46, 109, 63].

A Grmela és Öttinger által kidolgozott GENERIC (General Equation of Non-Equilibrium Reversible and Irreversible Coupling) [255, 256, 102] a hamiltoni mechanikát és az irreverzibilis termodinamikát lényegében mellérendelten kezeli. Minden elméletet szétszed egy variációs elvből származtatható mechanikai részre és egy entrópiát produkáló disszipatív részre. Ezt a két részt algebrailag összecsatolva (Poisson-zárójelekkel a mechanikai, és úgynevezett disszipatív zárójelekkel a termodinamikai részre) egy keretelméletet kapunk lényegében a teljes kontinuumfizikára. A konstrukció a Ginzburg–Landau-egyenlet következő fejezetben megmutatott hagyományos levezetésének az általánosítása. Öttinger és munkatársai számos példán mutatták meg, hogy ezzel az elméleti kerettel valóban megfoghatóak disszipatív és nemdisszipatív elemeket együtt tartalmazó elméletek. A reológiai indíttatású GENERIC magasabbrendű idő és térderiváltakat is bevezet az egyenletekbe. A módszer hiányossága egyrészt az elméleti alapfeltevések megduplázása (termodinamika és mechanika együttesen kell) és az, hogy nem konstruktív (pl. a variációs elvet meg kell sejteni, a Poisson-

⁸ A Liu-eljárást Liu maga [188], és Müllerrel együtt is [192], először időben és térben gyengén nemlokális konstitutív függvények származtatására próbálta használni.

struktúra is utólag ellenőrizhető igazán) [243].

Természetesen vannak más, a termodinamikai követelményekkel nem nagyon foglalkozó elképzelések is, mint például a fázismező-elmélet [125, 258]. Ezekkel kapcsolatban Gurtin kritikája idézhető: a variációs elvek intuitívak és világosak, de mivel disszipatív elméletet nem lehet variációs elvből levezetni, ezért nem lehetnek alapvetőek, legfeljebb valamilyen teljesebb elmélet előfutárainak tekinthetők [109].

A konstitutív elmélet lényeges része, hogy belső változók esetén is alkalmazható legyen. A belső változók olyan fizikai mennyiségek, amelyekkel az anyag szerkezeti változásait írjuk le (pl. mikrorepedezés esetén a 'fabric' tenzor, vagy képlékenységi deformáció) a hagyományos fizikai jellemzőkön felül. Általában a fejlődési egyenletük nem ismert. A termodinamikai modellezésnek képesnek kell lennie a fejlődési egyenletet olyan módon megszorítani, hogy a termodinamika második főtétele ne sérüljön. Mind a GENERIC, mind a racionális és a kiterjesztett termodinamika esetében találkozunk a belső változókkal. A nemegyensúlyi termodinamika heurisztikus alkalmazása relaxációs típusú közönséges differenciálegyenleteket eredményez fejlődési egyenletként, a racionális elmélet – mint említettem – ráadásul elvileg nem is teszi lehetővé, hogy a fejlődési egyenlet parciális differenciálegyenlet legyen [46]. A kiterjesztett termodinamika csak mérlegegyenleteket enged meg további változók fejlődési egyenleteként [154] és az újabb változók minden esetben a mérlegek áramsűrűségei lesznek (ezért nem is belső változóknak nevezik ezeket). Azok az elméletek, amelyek mechanikai variációs elveket használnak (GENERIC reverzibilis része, vagy például [214]) időben másodrendű differenciálegyenletekre vezetnek, kizárva az elsőrendű relaxációs típusú egyenletek lehetőségét.

Magyarországon a termodinamikának mély gyökerei vannak a matematikai módszertant illetően is. Farkas Gyulának az integráló osztó létezésére vonatkozó munkáját [74] már említettük. Ő azonban nem erről, hanem a lineáris egyenlőtlenségrendszerek alaptételének, a Farkas-lemmának bizonyításáról ismert világszerte. Meglepő módon ez az eredménye a nemegyensúlyi termodinamika megalapozásában is szerepet játszik. Ugyanis a fent említett Liu-eljárás lineáris algebrai alapállítása az affin Farkas-lemma speciális esete, ahogy erre Hauser és Kirchner 2002-ben rámutatott [119] (részletesebben lásd B függelék).

Verhás Józsefnek dinamikai szabadsági fokokra (speciális belső változókra) vonatkozó elmélete, illetve annak reológiai (és egyéb) alkalmazásai [323, 325] az időbeli gyenge nemlokalitások első bevezetésének tekinthetők. A térbeli gyenge nemlokalitást illetően Verhás nemegyensúlyi termodinamikai elmélete a különféle folyadékkristályokra vonatkozóan (Franck–Oseen-féle nemlokális entrópiasűrűséggel) a nemegyensúlyi termodinamika és a gyengén nemlokális elmélet egyik első fontos eredménye. Verhás és Nyíri entrópiaáramra vonatkozó megfontolásai [322, 249] nyilvánvalóvá tették a racionális irányzat egyik fő korlátját, azt, hogy az entrópiaáram nem lehet mindig a hőáram és a hőmérséklet hányadosa, hanem az is konstitutív mennyiség.

2.3.2. Gyengén nemlokális nemrelativisztikus kontinuumok

⁰Ebben a fejezetben a nemrelativisztikus kontinuumok fejlődési egyenleteit vizsgálom a gyengén nemlokális kiterjesztések szempontjából. A cél, hogy egységes, általános,

⁰ Ez a fejezet a [299] munkámon alapul.

szigorú és prediktív módszer kidolgozása, amely lehetővé teszi, hogy a fizika mezőelméleteinek fejlődési egyenleteit magasabbrendű tér- és időderiváltakkal egészítsük ki a hagyományos tagokon túl. A módszer alkalmazható kell legyen nemrelativisztikus rendszerekre, vagy akár relativisztikus kontinuumokra, lokális egyensúlyban és attól távol; tartalmaznia kell az ismert klasszikus példákat a gyengén nemlokális rendszerekre külön speciális feltevések (mint például variációs elvek, vagy mérleg forma) nélkül; minimális számú független feltevésen kell alapuljon; és konstruktív számítási módszert kell adjon a magasabbrendű kiterjesztések szisztematikus bevezetéséhez.

Ezeknek a követelményeknek a racionális termodinamika matematikai eljárásaira alpozott módszerek felelhetnek meg. Ezek elegendően általánosak, de nem elég teljesítőképesek. Alkalmazhatóságukhoz gyengén nemlokális kiterjesztések származtatására három megfigyelés szükséges:

- Az entrópia áramsűrűsége is konstitutív mennyiség.
- Az entrópiamérleg egyenlőtlenségéhez a kényszerek térderiváltja is kényszert jelenthet, a konstitutív állapottér rendjétől függően.
- Több csatolt változó időben magasabbrendű egyenletet eredményezhet.

A termodinamikai megfontolásokban az entrópia mérlege mindig másodlagos, származtatandó és kiszámítható. A fizikai rendszerről a termodinamikai megfontolásaink előtt általában már rendelkezünk valamilyen ismeretekkel. Elsősorban tudjuk, mik az alapváltozóink, és ezekre vonatkozó evolúciós egyenletekről is általában tudunk valamit. Ha ismereteink teljesek, azaz a differenciálegyenletekkel kapcsolatban korrekt matematikai feladatok – például kezdetiérték problémák – tűzhetőek ki, akkor az entrópiatermelés kiszámításával ellenőrizhetjük az addigi feltevéseink helyességét. Ha ismereteink nem teljesek, azaz a differenciálegyenletek nem záródnak – több ismeretlen fizikai mennyiségünk van, mint ahány egyenlet, – akkor a második főtétele segítségével találhatunk megfelelő függvényeket. A második főtétel erőteljesen megszorítja az anyagi tulajdonságokat rögzítő, úgynevezett konstitutív függvények és feltételek rendszerét.

Az itt ismertetendő termodinamikai modellezés esetén az első lépés a kinematikai keretek megadása, azaz először le kell rögzítenünk az alapváltozókat, kijelölni az *alapváltozók terét*. Valójában ez a lépés a legnehezebb, egy fizikai elmélet megfelelő változóinak megtalálása hosszú tapasztalatszerzés – megfigyelések, kísérletek és elméleti megfontolások – után lehetséges. Ezután az ismert feltételek (például mérlegek) figyelembe vételével meg kell keresnünk az anyagi, konstitutív függvényeket és eldönteni, hogy fizikai feltételeink szerint mi a *konstitutív állapottér*, az anyagfüggvények mitől függenek. A konstitutív állapottér, a módszertan szerint, az alapváltozók és azok deriváltjai feszítik ki. Az entrópia és az entrópiaáram szintén anyagi tulajdonságokat rögzít, anyagfüggvény. Az entrópiatermelést kiszámítva az egyenlőtlenséget kielégítő feltételeket keresünk. Az egyenlőtlenség megoldásának egyszerű heurisztikus módszere például az úgynevezett termodinamikai erő és áramok azonosítása. Ennél alaposabb elemzés a konstitutív függvények értelmezési tartományának vizsgálatával szűkíti azok lehetséges formáját. Mi a továbbiakban a Liu-eljárást fogjuk használni. Az eljárás a B függelék lineáris algebrai tételeit használja ki, felismerve, hogy az alapváltozók konstitutív állapottérben szereplőknél magasabb rendű deriváltjai algebrai

értelemben függetlennek tekinthetők, hiszen a kezdeti és peremfeltételektől függően értékük bármekkora lehet [188, 49].

A belső változók esetén magát a fejlődési egyenletet keressük. A továbbiakban három lehetőséget vizsgálunk. Először a lokális konstitutív állapotteret, majd másodrendűen gyengén nemlokális állapotteret tekintünk egyetlen belső változó esetén, majd végül duális belső változók specialitásait mutatom meg.

2.4. Gyengén nemlokális belső változók

⁰A gyenge nemlokalitás jelentésének szemléltetésére talán a legegyszerűbb példát a Ginzburg–Landau-egyenlet adja. A Ginzburg–Landau-egyenletre nemcsak, és nem elsősorban mint a szupravezetés speciális egyenletére gondolunk, hanem mint a belső változókra vonatkozó homogén relaxációs egyenlet első gyengén nemlokális kiterjesztésére⁹. A Ginzburg–Landau-egyenlet hagyományos levezetése karakterisztikus keveréke variációs és termodinamikai megfontolásoknak. Variációs elvet alkalmazunk a sztatikus részre, és a funkcionálderiváltak termodinamikai erőként vannak bevezetve egy relaxációs típusú egyenletbe.

Jelöljük ξ -vel egy nemrelativisztikus kontinuum valamely fizikai tulajdonságát leíró skalármezőt (egy skalár belső változót, vagy speciálisan egy másodrendű fázisátalakuláshoz tartozó rendparamétert). Feltételezzük, hogy a szabadenergia-sűrűség a belső változótól és gradiensétől is függ $(\xi, \partial_i \xi)$. Sok esetben a Ginzburg–Landau-szabadenergiát a következő speciális – gradiens négyzetes – formában vezetjük be:

$$f(\xi, \partial_i \xi) = f_0(\xi) + \gamma(\partial_i \xi)^2/2, \quad (2.9)$$

ahol γ anyagi paraméter, f_0 pedig a szabadenergia gradiensfüggetlen része, $(\partial_i \xi)^2 = \partial_i \xi \partial^i \xi$. Ismétlődő indexek továbbra is összegzést fognak jelenteni, de az A függelékben kifejtett absztrakt értelemben, általában koordinátarendszertől függetlenül¹⁰. Vezessük be továbbá a ∂_ξ jelölést a ξ változó szerinti parciális deriváltra. Ekkor, a szokásos érvelés szerint feltételezzük, hogy ξ változási sebessége egy V térfogatrészben negatívan arányos az anyag szabadenergia változásával.

$$\frac{d}{dt} \int_V \xi dV = -l\delta \int_V f(\xi, \partial_i \xi) dV. \quad (2.10)$$

Itt δ a teljes szabadenergia variációját jelöli. Ha feltételezzük, hogy a fenti egyenlőség minden V térfogatrészre érvényes, akkor megkapjuk az általános *Ginzburg–Landau-egyenletet* a következő formában:

$$\partial_t \xi = -l[\partial_\xi f - \partial_i(\partial_{\partial_i \xi} f)], \quad (2.11)$$

ahol ∂_t a parciális időderivált, és l anyagi együttható. Fentebb feltételeztük, hogy a közeg nyugalomban van. Speciálisan a (2.9) szabadenergiával pedig az egyenlet klasszikus formája adódik:

$$\partial_t \xi = -l[\partial_\xi f_0 - \gamma \partial^i \partial_i \xi]. \quad (2.12)$$

⁰ Ez a fejezet a [299, 300] munkáimon alapul.

⁹ Ezt az egyenletet (időderiválttal) először Landau és Khalatnikov vezette le [168]

¹⁰ A kontinuummechanikában szokott index nélküli jelölés kettőnél magasabbrendű tenzorokkal végzett összetett számítások esetén nagyon nehézkessé válik.

A továbbiakban megmutatom, hogy ebben a levezetésben a variációs elv – a funkcionálderiváltak használata – felesleges. A fenti egyenlet tisztán termodinamikai megfontolásokkal is megkapható.

2.4.1. Elsőrendű gyenge nemlokalitás – relaxáció

Tekintsük az $a(t, x^i)$ skalár térmennyiséget egy kontinuumban, amely nyugalomban van valamely inerciális megfigyelőhöz képest. Tegyük fel, hogy a fejlődési egyenletére nincs más fizikai megszorítás a második főtételen kívül. A fejlődési egyenletet általánosan a következő formában keressük:

$$\partial_t a + \hat{f} = 0, \quad (2.13)$$

ahol az \hat{f} tetszőleges konstitutív függvény, változóinak rögzítése a modellezés kiindulópontja. Itt és a továbbiakban az előzőekhez hasonlóan a parciális időderiváltat ∂_t -vel jelöljük, a konstitutív mennyiségeket pedig kalappal ($\hat{}$).

A fenti fejlődési egyenlet nem lehet teljesen tetszőleges, a második főtétel megszorítja lehetséges formáját. Az entrópiamérleg egyenlőtlensége a következő:

$$\partial_t \hat{s} + \partial_i \hat{J}^i \geq 0. \quad (2.14)$$

Itt az \hat{s} entrópiasűrűség és a \hat{J}^i entrópiáramsűrűség a fenti \hat{f} -hez hasonlóan konstitutív mennyiségek. Az alábbiakban feltételezzük, hogy az a alapváltozótól és annak $\partial_i a$ gradiensétől függenek, azaz konstitutív állapottér elsőrendűen gyengén nemlokális. Tehát

- az *alapváltozók terét* a ,
- a *konstitutív állapottér* $(a, \partial_i a)$ feszíti ki,
- a *konstitutív függvények* pedig \hat{s} , \hat{J}^i és \hat{f} .

Ekkor a konstitutív feltevéseinket figyelembe véve az entrópiamérleg a következő formájú:

$$\partial_a \hat{s} \partial_t a + \partial_{\partial_i a} \hat{s} \partial_{it} a + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \partial_{ij} a \geq 0. \quad (2.15)$$

Ebben az egyenletben a konstitutív függvények parciális deriváltjait rövidítve jelöltük, pl. $\frac{\partial \hat{s}}{\partial a} = \partial_a \hat{s}$. A fenti egyenlőtlenségre most Liu-tételét alkalmazzuk a B függelékben ismertetett módon. Az alapmezők aláhúzott parciális deriváltjai nincsenek benne a konstitutív állapottérben, ezek független algebrai mennyiségek és az ún. *folyamatirány-teret* feszítik ki. Azaz, a függelék jelöléseivel $\mathbf{p} = (\partial_t a, \partial_{ti} a, \partial_{ij} a)$, az együttthatóként szereplő konstitutív mennyiségeket pedig \mathbf{a} és \mathbf{b} vektoroknak feleltetjük meg. Vezessük be a $\hat{\lambda}$ Lagrange–Farkas-szorzót a (2.13) evolúciós egyenlethez, mint kényszerhez. Ekkor az entrópiegyenlőtlenség a következő formába írható:

$$0 \leq (\partial_a \hat{s} - \hat{\lambda}) \partial_t a + \partial_{\partial_i a} \hat{s} \partial_{it} a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \partial_{ij} a + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a - \hat{\lambda} \hat{f}. \quad (2.16)$$

A $\hat{\lambda}$ Lagrange–Farkas-szorzó létezése Liu tételének következménye. Ezek után kihasználjuk, hogy a folyamatirányok a konstitutív állapottér elemeitől függetlenek (algebrailag), abban az értelemben, hogy ezeknek a deriváltaknak az értéke más és más lehet, ugyanazon konstitutív állapot értékeknél (például a (2.13) differenciálegyenlet

2. Kontinuum-termodinamika

kezdeti értékeitől függően). Ekkor az aláhúzott tagok szorzói (2.16)-ben nullák és a Liu-egyenleteket adják:

$$\partial_t a : \quad \partial_a \hat{s} = \hat{\lambda}, \quad (2.17)$$

$$\partial_{it} a : \quad \partial_{\partial_i a} \hat{s} = 0^i, \quad (2.18)$$

$$\partial_{ij} a : \quad \partial_{\partial_{[j} a} \hat{J}^{i]} = 0^{ij}. \quad (2.19)$$

Az utolsó egyenletben az indexek melletti zárójelek a jelölt másodrendű tenzor szimmetrikus részét jelölik [$A^{(ij)} = \frac{1}{2}(A^{ij} + A^{ji})$], illetve általában az adott tenzorszorzatkomponensek szimmetrizáltját egy magasabb rendű tenzor esetén. Az első egyenlet az entrópia deriváltjaként határozza meg a Lagrange–Farkas-szorzót, a második azt mutatja, hogy az entrópiasűrűség lokális, azaz nem függ a gradiensétől. A harmadik egyenlet egy megoldását adja, ha az entrópiaáram szintén lokális. A Liu-egyenletek megoldásainak felhasználásával az egyenlőtlenség ekkor a következőképpen alakul:

$$0 \leq \partial_i \hat{J}^i(a) - \partial_a \hat{s}(a) \hat{f}(a, \partial_i a). \quad (2.20)$$

További feltevésünk, hogy a maradék entrópiaáram nulla; $\hat{J}^i \equiv 0^i$. Izotrop anyagok esetén ez mindig igaz, az izotrop vektorfüggvények reprezentációs tétele értelmében [232]. Ezért az entrópiaegyenlőtlenség egy határozatlan konstitutív függvény és az entrópia deriváltjának szorzatára egyszerűsödött, azaz termodinamikai áramot és termodinamikai erőt azonosíthatunk a klasszikus irreverzibilis termodinamikai értelemben. A fenti egyenlőtlenség megoldását kapjuk, ha a konstitutív függvény – a termodinamikai áram – pozitív szorzóval arányos a termodinamikai erővel.

$$\hat{f} = -\hat{l} \partial_a \hat{s}, \quad \hat{l} > 0. \quad (2.21)$$

Ez kétszer differenciálható \hat{f} esetén általános megoldás Lagrange középértéktételnek megfelelően (lásd pl. [109]). Általában nem használjuk ki az ebben rejlő általánosságot, és állandó \hat{l} együtthatóra szorítkozva a fenti megoldást lineáris közelítésként értelmezzük.

Tehát izotrop anyag skalár belső változójára vonatkozó fejlődési egyenlet a termodinamika második főtétele értelmében a következő relaxációs típusú közönséges differenciálegyenlet:

$$\partial_t a = \hat{l} \partial_a \hat{s}. \quad (2.22)$$

Az eljárás legfontosabb lépései tehát a következők voltak:

- Az alapváltozók, az alapkényszerek és a konstitutív függvények azonosítása. A konstitutív állapottér rögzítése. Ez utóbbi is fizikai kérdés, például a nemlokális kölcsönhatások szintjét, azaz a szereplő térderiváltak maximális rendjét kell eldöntenünk a kísérleti és egyéb modellezési tapasztalatok függvényében.
- Az entrópiaegyenlőtlenség felírása, parciális deriválások után a folyamatiránytér rögzítése és szükség esetén további, derivált kényszerek bevezetése.
- Liu tételének alkalmazása.
- A Liu-egyenletek és a disszipációs egyenlőtlenség megoldása.

Ebben a példában nem volt szükség további kényszerek bevezetésére, de ez szükséges magasabb rendű állapotterek esetén, ahogy a következő példában látni fogjuk.

Vegyük észre továbbá, hogy az utolsó pont, a Liu-egyenletek és a disszipációs egyenlőtlenség explicit megoldása általában nem lehetséges. Ebben az egyszerű példában is csak több matematikai egyszerűsítés után értünk célra. A fenti megoldás számos ponton általánosítható, illetve tovább vizsgálható. Például a lokális entrópiaáram feltételezése (2.19)-nek nem általános megoldása, és az antiszimmetrikus deriváltak fizikai szerepe lehet. Hővezető, izotrop, szilárd anyagok esetén Liu ennek segítségével bizonyította, hogy a hőáram nem lehet örvényes [189], bár a Fourier-egyenlet más levezetései (például a klasszikus irreverzibilis termodinamika) ezt elvileg nem zárják ki. Fontos azt is látni, hogy az olyan kézenfekvőnek tűnő matematikai feltevések, mint a konstitutív függvények kétszer folytonos deriválhatósága is fizikai következményekkel járhatnak. Erre legfontosabb példa a képlékenységi termodinamikai elmélete, amely Ziegler munkásságából fejlődve a termodinamikai erőkhöz nem kvadratikusan tagokkal oldja meg az entrópiatermelés egyenlőtlenségét, másodrendű Euler-homogenitást helyett elsőrendű homogenitást feltételez (lásd pl. [213], illetve az Onsageri értelmezést illetően [307]). Ez termodinamikailag az erők függvényében nem differenciálható termodinamikai áramokat (mint konstitutív függvényeket) jelent.

A továbbiakban a második főtétel egyenlőtlenségének explicit megoldásait keressük, ezért általában nem használjuk ki teljesen a modellezési lehetőségeket. Konkrétan nem törekszünk arra sem, hogy megadjuk a feltételeknek megfelelő legáltalánosabb megoldását a Liu-egyenleteknek. Például mindig fel fogjuk tételezni, hogy:

- a Liu-egyenletekben nemcsak a szimmetria érvényes;
- nincs maradék entrópiaáram;
- megfelelő mértékig differenciálhatóak a konstitutív függvények.

2.4.2. Másodrendű gyenge nemlokalitás - a Ginzburg–Landau-egyenlet

Ebben az esetben a probléma hasonló, a (2.13) általános fejlődési egyenletre vonatkozó termodinamikai követelményeket határozzuk meg, de most másodrendű gyengén nemlokális konstitutív állapotteret feltételezésével, amit az a alapállapotmező és annak első és második térderiváltjai, $\partial_i a$ és $\partial_{ij} a$ feszítenek ki.

Tehát ebben a példában

- az alapváltozók terét, az alapállapotteret a ,
- a konstitutív állapotteret pedig $(a, \partial_i a, \partial_{ij} a)$ feszíti ki,
- a konstitutív függvények pedig \hat{s} , \hat{J}^i és \hat{f} .

A folyamatirány-teret a következő deriváltak feszítik ki: $(\partial_t a, \partial_{ti} a, \partial_{tij} a, \partial_{ijk} a)$. Megfigyelhető, hogy ezek most nem függetlenek (2.13) gradiense egy lineáris egyenlet a folyamatirány-téren. Tehát az entrópiaegyenlőtlenségre vonatkozó további feltételként figyelembe kell vennünk, hogy

$$\partial_{ti} a + \partial_i \hat{f} = 0_i. \quad (2.23)$$

2. Kontinuum-termodinamika

A (2.13) egyenletre bevezetjük a $\hat{\lambda}$, a (2.23) egyenletre vonatkozóan pedig a $\hat{\Lambda}^i$ Lagrange–Farkas-szorzókat. Ezután pedig a Liu-eljárást alkalmazzuk, de most, és a továbbiakban már nem különítjük el e különböző lépéseket:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \partial_t \hat{s} + \partial_i \hat{J}^i - \hat{\lambda} (\partial_t a + \hat{f}) - \hat{\Lambda}^i (\partial_{ti} a + \partial_i \hat{f}) = \\
&= \partial_a \hat{s} \partial_t a + \partial_{\partial_i a} \hat{s} \partial_{it} a + \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} \partial_{ij} a + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \partial_{ij} a + \partial_{\partial_{jk} a} \hat{J}^i \partial_{ijk} a - \\
&\quad - \hat{\lambda} (\partial_t a + \hat{f}) - \hat{\Lambda}^i (\partial_{ti} a + \partial_a \hat{f} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{f} \partial_{ij} a + \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f} \partial_{ijk} a) = \\
&= (\partial_a \hat{s} - \hat{\lambda}) \underline{\partial_t a} + (\partial_{\partial_i a} \hat{s} - \hat{\Lambda}^i) \underline{\partial_{it} a} + \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} \underline{\partial_{ij} a} + \\
&\quad + (\partial_{\partial_{jk} a} \hat{J}^i - \hat{\Lambda}^i \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f}) \underline{\partial_{ijk} a} + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \partial_{ij} a - \\
&\quad - \hat{\Lambda}^i (\partial_a \hat{f} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{f} \partial_{ij} a) - \hat{\lambda} \hat{f}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Látható, hogy a degeneráció most más, mint az előző esetben. A (2.24) egyenlőtlenség aláhúzott parciális deriváltjainak a szorzói adják a Liu-egyenleteket:

$$\partial_t a : \quad \partial_a \hat{s} = \hat{\lambda}, \tag{2.25}$$

$$\partial_{it} a : \quad \partial_{\partial_i a} \hat{s} = \hat{\Lambda}^i, \tag{2.26}$$

$$\partial_{ij} a : \quad \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} = 0^{ij}, \tag{2.27}$$

$$\partial_{ijk} a : \quad \partial_{\partial_{(jk} a} \hat{J}^i) = \hat{\Lambda}^{(i} \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f}. \tag{2.28}$$

Az első két egyenlet az entrópia deriváltjait hozza összefüggésbe a Lagrange–Farkas-szorzókkal, a harmadik egyenlet egy megoldása, ha az entrópia független a második gradiensétől. Ezért a $\hat{\Lambda}^i$ Lagrange–Farkas-szorzó is független ettől a deriválttól és az utolsó egyenlet integrálható (ismét feltételezve, hogy nemcsak a szimmetrikus részére igaz az egyenlőség):

$$\hat{J}^i(a, \partial_i a, \partial_{ij} a) = \partial_{\partial_i a} \hat{s}(a, \partial_i a) \hat{f}(a, \partial_i a, \partial_{ij} a) + \hat{\mathfrak{J}}^i(a, \partial_i a), \tag{2.29}$$

ahol a maradék entrópia áram, $\hat{\mathfrak{J}}^i$, egy tetszőleges konstitutív függvény, a jelölt változóknak, hasonlóan az előző fejezethez. Ez a Liu-egyenletek fenti, (2.25)–(2.28) rendszerének egy teljes megoldása, amelyet figyelembe véve a disszipációs egyenlőtlenség az alábbi formára egyszerűsödik:

$$0 \leq \partial_i \hat{\mathfrak{J}}^i + [\partial_i (\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}] \hat{f}. \tag{2.30}$$

Feltételezve, hogy a maradék entrópia áramsűrűség nulla, azaz $\hat{\mathfrak{J}}^i \equiv 0^i$, a jobb oldalon egy erő-áram rendszert kaptunk. Ennek klasszikus megoldása

$$\hat{f} = \hat{l} [\partial_i (\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}], \quad \hat{l} > 0. \tag{2.31}$$

Tehát egy belső változó termodinamikailag megengedett fejlődési egyenlete másodrendűen gyengén nemlokális konstitutív állapottéren a Ginzburg–Landau-egyenlet:

$$\partial_t a = \hat{l} [\partial_a \hat{s} - \partial_i (\partial_{\partial_i a} \hat{s})]. \tag{2.32}$$

A gradiensben kvadratikus (2.9) entrópiasűrűséggel kapjuk az egyenlet klasszikus formáját, ha γ állandó. $\gamma > 0$ az entrópia konkávitásának követelménye miatt. Más nemlokális termodinamikai potenciálok is használhatóak a fenti levezetésben, például a szabadenergia, viszont ebben az esetben a többi termodinamikai kölcsönhatáshoz történő kapcsolódást elővigyázatosan kell kezelniük [258].

Érdekes összevetni a fenti levezetést a Ginzburg–Landau-egyenlet variációs levezetésével. Az utóbbi feltételezi, hogy az egyenlet sztatikus, egyensúlyi részét variációs elv segítségével kapjuk meg, az időbeli változást pedig stabilitásos, termodinamikai érveléssel szokták hozzátenni. Azonban a variációs elv eredete, a két rész összekapcsolása és főképpen a második főtétel szerepe önkényes és nem kompatibilis a kontinuumfizika általános mérlegegyenlet és anyagfüggvény szerkezetével. A fenti levezetésben ezeket az összetevőket egyetlen, termodinamikai gondolatmenetben egyesítettük, ráadásul megkaptuk az entrópiaáram formáját is. Megjegyzendő, hogy semmiféle variációs elvre nem hivatkoztunk közben, a sztatikus rész Euler–Lagrange-egyenlet formája is levezetett. A dinamikai rész relaxációs típusú, elsőrendű időderiváltat tartalmaz, nem kapható meg Hamilton-típusú variációs elvből minden további nélkül [318].

Természetesen a Ginzburg–Landau-egyenletnek számos másféle, eltérő elveken alapuló levezetése van [109, 196]. A fenti levezetés azt mutatja, hogy nagyon kevés feltevés, tulajdonképpen egyedül a második főtétel elegendő és szükségtelen olyan további erős posztulátumokat használni, mint egy Hamilton-féle variációs elv, vagy mondjuk a Gurtin által javasolt mikroerő-mérleg. A következő fejezetben a variációs elvek és termodinamika második főtételének egy másik szempontja merül fel.

2.5. Duális belső változók és Hamilton-formalizmus

⁰A belső változók fejlődési egyenletének meghatározására vonatkozóan két szokásos megközelítés van.

Az egyik módszer alapján a belső változók fejlődési egyenletét az entrópiaegyenlőtlenség segítségével, kizárólag termodinamikai elvekkel határozzuk meg. Ekkor a megfelelő belső változókat szokás *belső állapotváltozóknak* nevezni [217]. A módszernek az az előnye, hogy csak termodinamikai fogalmakat használ (entrópia, termodinamikai erő), a hátránya viszont, hogy önmagában nem tud inerciális hatásokat modellezni. A belső változók termodinamikai elmélete nagyon régi (lásd a történeti megjegyzéseket [219]-ban). Az első többé kevésbé teljes termodinamikai elméletet Coleman és Gurtin javasolta [46], az elmélet általános elveinek egy tiszta bemutatását adta meg Muschik [238]. Belső állapotváltozókat nagyon változatos jelenségek modellezésére használjuk a fizika, biológia és anyagtudományok különböző területein. A termodinamikai elmélet teljes leírása, rengeteg alkalmazással található meg Verhás könyvében [325]. Verhás a belső állapotváltozóknak egy speciális formáját vezette be, amelyet *dinamikai szabadsági fokoknak* nevezett. Ezek olyan speciális belső állapotváltozók, amelyek értéke egyensúlyban nulla és fizikai tulajdonságaikat csak termodinamikai feltételek korlátozzák.

A belső változók fejlődési egyenletét megadó másik fő javaslat mechanikai módon Hamilton-féle variációs elven alapul, benne az inerciális effektusok jelenléte elkerülhetetlen. A belső változókat ebben az esetben *belső szabadsági fokoknak* szokás nevezni.

⁰ Ez a fejezet a [311] munkámon alapul.

2. Kontinuum-termodinamika

A disszipációt is variációs módon, disszipációs potenciálok segítségével adjuk hozzá az elmélethez. Ennek az elméleti keretnek az az előnye, hogy mechanikai fogalmakra épül (erő, energia). A módszert Maugin javasolta [214] és szintén nagyszámú alkalmazása van [213, 71]. A két módszert élesen megkülönbözteti és számos alkalmazási területet említ Maugin és Muschik [219, 220], illetve Maugin [217].

Ennek a megkettőzött elméleti keretnek egyik fontos sajátossága a variációs elvek és a termodinamika közötti viszony. A kontinuumfizika termodinamikai eredetű alapegyenleteinek alapvetően nincs variációs megfogalmazása [318]. Ez tükröződik a disszipációs potenciálok, mint független elméleti entitások megjelenésében a disszipációt is tartalmazó variációs elméletekben.

Másrészről, tiszta termodinamikai módszerekkel – a belső változók esetén – inerciális hatásokat nem tudunk figyelembe venni. Ezért, a legegyszerűbb mechanikai folyamatokhoz való kapcsolódás is megköveteli, hogy kiegészítsük a termodinamikai elméletet – általában mechanikai eredetű és jellegű új elvekkel.

A továbbiakban saját kutatási eredményekre alapozva [311] megmutatom, hogy a mechanikai szerkezet, a második deriváltak és Euler–Lagrange-forma, következik a termodinamikai elvekből. Ehhez duális belső változók bevezetésére van szükség, és a nemegyensúlyi termodinamika szokásos alapelveinek általánosítására: nincs szükség Onsager–Casimir-féle reciprocitási relációkra. Duális belső változókkal figyelembe tudjuk venni az inerciális hatásokat és visszkapjuk a dinamikai szabadsági fokokra vonatkozó fejlődési egyenleteket. Ez nem lehetséges egyetlen belső változóval. A fent kifejtett, kettős elméleti szerkezet helyett a változók megkettőzésével is célt érhetünk. Tekintsünk egy termodinamikai rendszert, amelynek alapállapotterét két skalár belső változó feszíti ki, a és b . Ezekre a változókra a következő differenciálegyenleteket feltételezzük.

$$\partial_t a + \hat{f} = 0, \quad (2.33)$$

$$\partial_t b + \hat{g} = 0. \quad (2.34)$$

Az \hat{f} és \hat{g} függvények a differenciálegyenlet jobb oldalán konstitutívak, és a termodinamika második főtétele miatt nem lehetnek akármilyenek. Az entrópiaegyenlőtlenséget a korábbiakban már felírtuk (2.14). A konstitutív állapotfüggvények értelmezési tartományát most az alapváltozók és azok első és második térderiváltjai feszítik ki. Tehát összefoglalva

- az alapállapotteret (a, b) ,
- a konstitutív állapotteret pedig $(a, \partial_i a, \partial_{ij} a, b, \partial_i b, \partial_{ij} b)$ változók feszítik ki,
- a konstitutív függvények pedig $\hat{s}, \hat{J}^i, \hat{f}$ és \hat{g} .

Ez egy másodrendűen gyengén nemlokális állapotter mindkét alapváltozóban. A vonatkozó folyamattírányteret a $(\partial_t a, \partial_{ti} a, \partial_{tij} a, \partial_{ijk} a, \partial_t b, \partial_{ti} b, \partial_{tij} b, \partial_{ijk} b)$ deriváltak adják. A (2.33)–(2.34) fejlődési egyenletek gradiensei maguk is kényszereket jelentenek az entrópia egyenlőtlenségre ebben az esetben:

$$\partial_{ti} a + \partial_i \hat{f} = 0_i, \quad (2.35)$$

$$\partial_{ti} b + \partial_i \hat{g} = 0_i. \quad (2.36)$$

Bevezetjük a $\hat{\lambda}_a, \hat{\lambda}_b$ Lagrange–Farkas-szorzókat a (2.33)–(2.34) egyenletekre és $\hat{\Lambda}_a^i, \hat{\Lambda}_b^i$ szorzókat pedig a derivált, a (2.35)–(2.36) egyenlőségekre. A Liu-eljárás ezek után lényegében egy megduplázott Ginzburg–Landau-szerkezetet eredményez:

$$\begin{aligned}
 0 \leq & \partial_t \hat{s} + \partial_i \hat{J}^i - \hat{\lambda}_a (\partial_t a + \hat{f}) - \hat{\Lambda}_a^i (\partial_{ti} a + \partial_i \hat{f}) - \\
 & - \hat{\lambda}_b (\partial_t b + \hat{g}) - \hat{\Lambda}_b^i (\partial_{ti} b + \partial_i \hat{g}) = \\
 = & \partial_a \hat{s} \partial_t a + \partial_{\partial_i a} \hat{s} \partial_{it} a + \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} \partial_{ijt} a + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \partial_{ij} a + \partial_{\partial_{jk} a} \hat{J}^i \partial_{ijk} a - \\
 & - \hat{\lambda}_a (\partial_t a + \hat{f}) - \hat{\Lambda}_a^i (\partial_{ti} a + \partial_a \hat{f} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{f} \partial_{ij} a + \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f} \partial_{ijk} a + \\
 & + \partial_b \hat{f} \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{f} \partial_{ij} b + \partial_{\partial_{jk} b} \hat{f} \partial_{ijk} b) + \\
 & + \partial_b \hat{s} \partial_t b + \partial_{\partial_i b} \hat{s} \partial_{it} b + \partial_{\partial_{ij} b} \hat{s} \partial_{ijt} b + \partial_b \hat{J}^i \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{J}^i \partial_{ij} b + \partial_{\partial_{jk} b} \hat{J}^i \partial_{ijk} b - \\
 & - \hat{\lambda}_b (\partial_t b + \hat{g}) - \hat{\Lambda}_b^i (\partial_{ti} b + \partial_b \hat{g} \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{g} \partial_{ij} b + \partial_{\partial_{jk} b} \hat{g} \partial_{ijk} b + \\
 & + \partial_a \hat{g} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{g} \partial_{ij} a + \partial_{\partial_{jk} a} \hat{g} \partial_{ijk} a). \tag{2.37}
 \end{aligned}$$

Átrendezés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 0 \leq & (\partial_a \hat{s} - \hat{\lambda}_a) \partial_t a + (\partial_{\partial_i a} \hat{s} - \hat{\Lambda}_a^i) \partial_{it} a + \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} \partial_{ijt} a + \\
 & + (\partial_{\partial_{jk} a} \hat{J}^i - \hat{\Lambda}_a^i \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f} - \hat{\Lambda}_b^i \partial_{\partial_{jk} a} \hat{g}) \partial_{ijk} a - \hat{\lambda}_a \hat{f} - \\
 & - \hat{\Lambda}_a^i (\partial_a \hat{f} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{f} \partial_{ij} a + \partial_b \hat{f} \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{f} \partial_{ij} b) + \\
 & + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \partial_{ij} a + \\
 & + (\partial_b \hat{s} - \hat{\lambda}_b) \partial_t b + (\partial_{\partial_i b} \hat{s} - \hat{\Lambda}_b^i) \partial_{it} b + \partial_{\partial_{ij} b} \hat{s} \partial_{ijt} b + \\
 & + (\partial_{\partial_{jk} b} \hat{J}^i - \hat{\Lambda}_a^i \partial_{\partial_{jk} b} \hat{f} - \hat{\Lambda}_b^i \partial_{\partial_{jk} b} \hat{g}) \partial_{ijk} b - \\
 & - \hat{\lambda}_b \hat{g} - \hat{\Lambda}_b^i (\partial_b \hat{g} \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{g} \partial_{ij} b + \partial_a \hat{g} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{g} \partial_{ij} a) + \\
 & + \partial_b \hat{J}^i \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{J}^i \partial_{ij} b. \tag{2.38}
 \end{aligned}$$

Itt is a folyamatiránytér szorzói adják a Liu-egyenleteket

$$\partial_t a : \quad \partial_a \hat{s} = \hat{\lambda}_a, \tag{2.39}$$

$$\partial_{it} a : \quad \partial_{\partial_i a} \hat{s} = \hat{\Lambda}_a^i, \tag{2.40}$$

$$\partial_t b : \quad \partial_b \hat{s} = \hat{\lambda}_b, \tag{2.41}$$

$$\partial_{it} b : \quad \partial_{\partial_i b} \hat{s} = \hat{\Lambda}_b^i, \tag{2.42}$$

$$\partial_{ijt} a : \quad \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} = 0^{ij}, \tag{2.43}$$

$$\partial_{ijt} b : \quad \partial_{\partial_{ij} b} \hat{s} = 0^{ij}, \tag{2.44}$$

$$\partial_{ijk} a : \quad \partial_{\partial_{jk} a} \hat{J}^i = \hat{\Lambda}_a^i \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f} + \hat{\Lambda}_b^i \partial_{\partial_{jk} a} \hat{g}, \tag{2.45}$$

$$\partial_{ijk} b : \quad \partial_{\partial_{jk} b} \hat{J}^i = \hat{\Lambda}_b^i \partial_{\partial_{jk} b} \hat{g} + \hat{\Lambda}_a^i \partial_{\partial_{jk} b} \hat{f}. \tag{2.46}$$

Az első négy egyenlet a Lagrange–Farkas-szorzókról mutatja meg, hogy azok az entrópia deriváltjai. Az ötödik és hatodik szerint az entrópia független a és b második térderiváltjaitól. Következésképpen $\hat{\Lambda}_a^i$ és $\hat{\Lambda}_b^i$ Lagrange–Farkas-szorzók is azok, és ezért az utolsó két egyenlet integrálható és megkapjuk az entrópiaáramot:

$$\hat{J}^i = \partial_{\partial_i a} \hat{s} \hat{f} + \partial_{\partial_i b} \hat{s} \hat{g} + \hat{\mathfrak{J}}^i(a, \partial_i a, b, \partial_i b). \tag{2.47}$$

2. Kontinuum-termodinamika

A $\hat{\mathfrak{J}}^i$ maradék entrópia áram a jelölt változóktól függő tetszőleges konstitutív függvény lehet. Ezzel a Liu-egyenletek (2.39)–(2.46) rendszerének egy teljes megoldását adtuk meg. Ennek felhasználásával a disszipációs egyenlőtlenség leegyszerűsödik:

$$0 \leq \partial_i \hat{\mathfrak{J}}^i + [\partial_i(\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}] \hat{f} + [\partial_i(\partial_{\partial_i b} \hat{s}) - \partial_b \hat{s}] \hat{g}. \quad (2.48)$$

Feltételezve, hogy $\hat{\mathfrak{J}}^i \equiv 0^i$, azaz a maradék entrópiaáram-sűrűség nulla, az egyenlőtlenség a következő formájú termodinamikai erő-áram rendszerre redukálódik:

$$a \text{ erő: } \hat{A} = \partial_i(\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}, \quad a \text{ áram: } \hat{f},$$

$$b \text{ erő: } \hat{B} = \partial_i(\partial_{\partial_i b} \hat{s}) - \partial_b \hat{s}, \quad b \text{ áram: } \hat{g}.$$

Az egyenlőtlenség klasszikus megoldása az erők és áramok kapcsolatát adja, a következő csatolt Ginzburg–Landau-egyenletrendszer formájában:

$$\partial_t a = \hat{f} = \hat{l}_1 [\partial_i(\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}] + \hat{l}_{12} [\partial_i(\partial_{\partial_i b} \hat{s}) - \partial_b \hat{s}], \quad (2.49)$$

$$\partial_t b = \hat{g} = \hat{l}_{21} [\partial_i(\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}] + \hat{l}_2 [\partial_i(\partial_{\partial_i b} \hat{s}) - \partial_b \hat{s}]. \quad (2.50)$$

Az $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_{12}, \hat{l}_{21}$ vezetési együtthatók a második főtételek értelmében nem lehetnek tetszőlegesek. Általános esetben, azaz amennyiben nem tételezzük fel reciprocitási relációk érvényességét, a szimmetrikus és antiszimmetrikus részeket szétválasztjuk a következő együttható kombinációk bevezetésével: $\hat{l} = (\hat{l}_{12} + \hat{l}_{21})/2$ és $\hat{k} = (\hat{l}_{12} - \hat{l}_{21})/2$. Az entrópiatermelés nemnegatív, ha

$$\hat{l}_1 \geq 0, \quad \hat{l}_2 \geq 0 \quad \text{és} \quad \hat{l}_1 \hat{l}_2 - \hat{l}^2 \geq 0. \quad (2.51)$$

A (2.49)–(2.50) fejlődési egyenleteket átírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \partial_t a \\ \partial_t b \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l}_1 & \hat{k} + \hat{l} \\ \hat{k} - \hat{l} & \hat{l}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Természetesen felmerül a kérdés, hogy mi helyzet a reciprocitási relációkkal, azaz egyrészt jogos-e nem csak a szimmetrikus vagy antiszimmetrikus csatolást tekinteni, másrészt van-e ennek bármi fizikai szerepe?

A reciprocitási relációk a fő következményei Lars Onsager gondolatának, amely összekapcsolja a fluktuációkat a makroszkópikus termodinamikával [251, 252, 253, 194, 36]. Maga Onsager eredményeinek érvényességi körét a következőképpen értékeli:

"A következő megszorítást tettük: egy kinetikus modellben a termodinamikai változók a nagyszámú molekuláris változó algebrai összegei, és szükséges, hogy páros függvényei legyenek azoknak a molekuláris változóknak, melyek páratlan függvényei az időnek (mint például a molekuláris sebességek)." ¹¹ [194]

A Casimir-típusú reciprocitási relációk is mikroszkópikus fluktuációkon alapulnak [36]. A legtöbb belső változó esetén nincs ilyen mikro-, vagy mezoszkópikus háttér. Például a károsodás jellemzésére bevezetett belső változók a legegyszerűbb esetekben is

¹¹ "The restriction was stated: on a kinetic model, the thermodynamic variables must be algebraic sums of (a large number of) molecular variables, and must be *even* functions of those molecular variables which are odd functions of time (like molecular velocities)."

bonyolult szerkezeti rendezetlenséget, esetleg mikrorepedezettség-formákat jellemeznek mezoszkopikus skálán (vagy mikrorepedezettség-eloszlásokat). A termodinamikai változók és a mezoszkopikus szerkezet viszonya reménytelenül bonyolult minden gyakorlatilag érdekes, nem túlidealizált esetben. De még az ideálisan rugalmas kontinuumban található egyforma és szabályosan elrendezett mikrorepedések esetén sem egyszerű makroszkopikus mezőket találni [244]. Másrészt az Onsager-féle reciprocitás időtükrözési tulajdonságokat is feltételez vagy mikro-, vagy legalább makroszinten [222, 323]. Belső változók esetén erről sem beszélhetünk. Tehát a reciprocitási relációk érvényességének egyik feltétele sem teljesül esetünkben, az általános eset feltételezése ezért nem ésszerűtlen. A 2.10 fejezetben konkrét példát említék, deformáció és tenzoriális belső változó csatolása esetén.

Belső állapothatározók

Ha a vezetési mátrix diagonális, azaz $\hat{l} = 0$ és $\hat{k} = 0$, akkor (2.49)–(2.50) két független egyenletté esik szét:

$$\begin{aligned}\partial_t a &= \hat{l}_1 \hat{A}, \\ \partial_t b &= \hat{l}_2 \hat{B}.\end{aligned}$$

Ekkor visszakaptuk az előző fejezetben leírt speciális esetet.

Belső szabadsági fokok

Tegyük fel, hogy minden vezetési együttható állandó és a vezetési mátrix antiszimmetrikus, azaz $l_1 = l = 0$ és $k = 1$. Ekkor $l_{12} = -l_{21}$, tehát a Casimir-típusú reciprocitási relációk érvényesek.

Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy, a változóiban szeparálódó entrópiát a következő módon:

$$\hat{s}(a, \partial_i a, b, \partial_i b) = -K(b) - W(a, \partial_i a). \quad (2.53)$$

Ekkor a termodinamikai erők a következők:

$$\hat{A} = \partial_a W - \partial_i (\partial_{\partial_i a} W), \quad \hat{B} = d_b K = K'(b),$$

és a (2.52) fejlődési egyenlet

$$\begin{aligned}\partial_t a &= \hat{B} = K'(b), \\ \partial_t b &= -\hat{A} + l_2 \hat{B} = -\partial_a W + \partial_i (\partial_{\partial_i a} W) + l_2 K'(b).\end{aligned} \quad (2.54)$$

A fenti egyenletrendszer Hamilton-dinamikát tartalmaz [4], a második egyenlethez adott disszipációs taggal kiegészítve. Az \hat{s} entrópiasűrűség formálisan a Hamilton-függvény szerepét játssza, a az általánosított helyzet változó és b a konjugált impulzus, a szokásosnál csak egy kicsit általánosabban. A Lagrange-dinamikára történő transzformációja triviális, ha $K(b) = \frac{b^2}{2m}$ kvadratikussá, ahol m állandó. A (2.54) egyenletrendszer formája és szerkezete a belső szabadsági fokokra javasolt fejlődési egyenletek szerkezetét adja, ahogy az [219] és (5.14) összehasonlításából látszik az alábbi Lagrange-függvénnyel és disszipációs potenciállal

$$\mathcal{L}(\partial_t a, a, \partial_i a) = m \frac{(\partial_t a)^2}{2} - W(a, \partial_i a), \quad \text{és} \quad D(a, \partial_i a) = \frac{m l_2}{2} (\partial_t a)^2.$$

2. Kontinuum-termodinamika

A termodinamikai módszer megadja az entrópiaáram-sűrűséget is. Az általános (2.47) a speciális (2.53) entrópiával a következő formájú:

$$J^i = -K'(b)\partial_{\partial_i a}s + \mathfrak{J}_0^i.$$

A fenti Lagrange-függvénnyel felírt Hamilton-típusú variációs elv természetes peremfeltételei a peremeken eltűnő entrópiaáram-sűrűségnek felelnek meg $\mathfrak{J}_0^i \equiv 0^i$ feltétellel.

Tehát a belső szabadsági fokok mechanikai motivációjú variációs módszere természetesen vezethető le egy tisztán termodinamikai keretben. A termodinamikai keret általánosabb, bizonyos együtthatók előjelét meghatározza, és az entrópiaáram is számolható belőle. Emellett a természetes peremfeltételek az entrópiaáram eltűnésének felelnek meg a peremen [311, 18].

Disszipációs potenciálok

A disszipációs potenciálok eredetileg Rayleigh disszipációs függvényeiként bukkannak fel [264]. Bizonyos feltételek teljesülése esetén fejlődési egyenleteink disszipatív részét tudjuk belőlük leszámaztatni. A variációs elvek kényelmesen kiegészíthetők velük és bizonyos típusú disszipatív hatások származtathatóak segítségükkel [253, 194]. Szimmetrikus, szigorúan lineáris vezetési egyenletek, vagy a nemlineáris Gyarmati-Li reciprocitási relációk [179, 112] biztosítják létezésüket. Az Onsager-szimmetriák magukban, például kvázilineáris vezetési egyenletekre, ehhez nem elegendőek.

Egy Hamilton-típusú variációs elvnek a disszipációs potenciálok nem részei, de további szabályokkal kiegészítve az elvet disszipatív tagokat származtathatunk segítségükkel. Sokáig azt remélték, hogy megfelelő általánosításuk általános módszert ad disszipatív fizikai rendszerek egyenleteinek variációs származtatására [113].

Diffúz belső változók

Diffúz belső változókat önmagában [218, 59, 70] értelmez. Ebben a szakaszban a belső szabadsági fokokra és a belső állapothatározókra vonatkozó fejlődési egyenletek közötti szoros viszonyra mutatunk példát.

Az előző példa vezetési együtthatóit megtartva (azaz, $l_1 = l = 0$, $k = 1$), kvadratis formájú K és W függvények esetén kapjuk, hogy

$$K(b) = \frac{\beta}{2}b^2, \quad W(a, \partial_i a) = \frac{\alpha}{2}(\partial_i a)^2,$$

ahol α és β pozitív állandók a konkávitás követelménye miatt. Ekkor a (2.54) fejlődési egyenlet:

$$\begin{aligned} \partial_t a &= \hat{B} = K'(b) = \beta b, \\ \partial_t b &= -\partial_a W + \partial_i(\partial_{\partial_i a} W) + l_2 K'(b) = \alpha \partial_{ii} a + l_2 \beta b. \end{aligned} \quad (2.55)$$

b -t kiküszöbölve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\alpha\beta}\partial_{tt}a - \frac{l_2}{\alpha}\partial_t a = \partial_{ii}a. \quad (2.56)$$

Ez egy telegráf (Maxwell–Cattaneo–Vernotte) típusú egyenlet az a belső változóra vonatkozóan. Egyrészt felfoghatjuk úgy, mint a diffúziós (hővezetési) egyenlet kiterjesztését egy tehetetlenségi taggal, de ugyanakkor és másrészt hullámegyenlet egy diffúziós taggal kiegészítve. Ez a kettősség szemléletesen mutatja a termodinamikai és mechanikai stratégiák irányát is az ilyen jellegű egyenletek származtatására.

Összefoglalás

A duális belső változókra vonatkozó gyengén nemlokális elmélet keretei között származtattuk a belső dinamikai változók mechanikai eredetű fejlődési egyenleteit.

Általában elfogadott tévhit a belső változókra vonatkozóan, hogy mérhetőek, de nem szabályozhatóak [155]. Ez igaz mindaddig, amíg fejlődési egyenleteik relaxációs, azaz csak időfüggésre vonatkozó egyenletek. Szabályozhatóság a peremfeltételekkel érhető el. Ha a belső változókra gyengén nemlokálisan kiterjesztett egyenletek érvényesek, akkor azok szabályozhatóak.

A duális belső változók elméletének van egy természetes ellenőrzési lehetősége. Nevezetesen a mechanika hiperkontinuum-elméletei, az úgynevezett mikrokontinuum-elméletek [50, 72] belső változós elméletek, ahol a belső, kinematikailag értelmezett változókra (mikrodeformáció, mikroforgás, mikronyúlás) vonatkozó fejlődési egyenleteket tisztán mechanikai analógiákkal származtatják. A duális belső változókkal természetes módon vezethetőek le ezek az egyenletek [19], sőt, az egész elméletcsalád beágyazható a nemegyensúlyi termodinamika keretei közé. Szintén említésre méltó, hogy számos, a kontinuumokban történő hullámterjedésére vonatkozó egyenlet egyezíthető, a bennük szereplő tagok és azok összefüggése értelmezhető, és többféle tulajdonság magyarázható a duális belső változók rendszereként felfogott hierarchikus mikrostruktúra-modellezéssel [18].

Az is érdekes, hogy antiszimmetrikus csatolású termodinamikai erők és áramok nem csak tehetetlenségért lehetnek felelősek. Verhás gondolatébresztő munkáit fontos ezzel kapcsolatban megemlíteni [324, 326].

Végül, a szimmetriatulajdonságok nélküli vezetési egyenletekre jó példát jelenthet a teljes fenomenologikus reológia, ahol a lineáris, rugó-dugattyú elemekből összerakott modellek elemszámának növelésével képesek a kísérletekhez jobb illesztést elérni. Ez a fajta modellezés mindenféle termodinamikai feltétel nélkül dolgozik. A termodinamikai megszorítások viszont csak szimmetrikus, vagy antiszimmetrikus vezetési egyenletek feltételezésével túl szigorúak, kizárnak valódi, megvalósuló lehetőségeket a lehetséges modellek közül [6]. Erre a kérdésre visszatérek a 2.10 szakaszban.

2.6. Gyengén nemlokális extenzívek – klasszikus irreverzibilis termodinamika

⁰Az előző fejezetben alkalmazott módszer általános. Ebben a fejezetben azt mutatjuk meg, hogy a klasszikus irreverzibilis termodinamika erő-áram rendszere egy speciális esetét jelenti ennek az általános módszernek, jól meghatározott feltételek esetén.

⁰ Ez a fejezet a [298] munkámon alapul.

2. Kontinuum-termodinamika

Azt keressük, hogy extenzív fizikai mennyiségekre milyen feltételeket ró ki az entrópiaprodukció egyenlőtlensége. Vagyis keressük olyan mezők fejlődési egyenletét, amelyekre mérleg formájú kényszerfeltétel igaz. Egy *megmaradó* fizikai mennyiségre vonatkozó mérleget általában a következő formában írunk

$$\partial_t \mathbf{a} + \partial_i \hat{\mathbf{j}}^i = \mathbf{0}. \quad (2.57)$$

Itt az \mathbf{a} sűrűség tekinthető mondjuk a szokásos extenzívek sűrűségei Descartes szorzatának, azaz $\mathbf{a} = (\rho, e, \dots)$, ahol ρ a (tömeg-)sűrűség, e a belsőenergia-sűrűség, $\hat{\mathbf{j}}^i$ pedig a megfelelő \mathbf{a} -áramsűrűségek függvénye: $\hat{\mathbf{j}}^i = (\rho \mathbf{v}^i, \rho e \mathbf{v}^i + \hat{\mathbf{j}}_e^i, \dots)$, ahol az első tag a tömegáram, a második tag a belső energia konvektív és konduktív áramsűrűsége.

A fenti kényelmes jelöléssel csak a számunkra fontos, a fejlődési egyenletek mérleg-szerkezetét (azaz a téridő beágyazottságát) tükröző szabad indexeket használjuk. Az egyes konkrét fizikai mennyiségekre vonatkozó egyenleteknek lehetnek olyan további tulajdonságai, amiket most nem veszünk figyelembe. Például a tömegmérlegben a kontinuum tömegközépponti mozgásával definiált, baricentrikus sebességmező használata miatt nincs konduktív áramsűrűség, illetve a forrástagoknak megkerülhetetlen a szerepe például a belső energia mérlegénél. Nem is mindenfajta mérleg illeszthető bele problémamentesen ebbe a sémába: a lendületmérleg kérdése komolyabb megfontolást igényel. Az irreverzibilis termodinamika alapvető szerkezete, az erő-áram párok megjelenése az entrópiaprodukcióban azonban nem ezen múlik.

További speciális feltevésként ebben a fejezetben pedig nyugvó kontinuumot tekintünk és elsőrendűen nemlokális állapotteret. Ekkor összefoglalva igaz, hogy

- az alapállapotteret \mathbf{a} feszíti ki,
- konstitutív állapotteret $(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a})$,
- a konstitutív függvények pedig az entrópia és áramsűrűsége, továbbá \mathbf{a} áramsűrűsége: \hat{s} , \hat{J}^i és $\hat{\mathbf{j}}^i$.

A fenti (2.57) fejlődési egyenlet nem tetszőleges, teljesülnie kell rá a termodinamika második főtételének a (2.14) formában. Vezessük be a λ Lagrange–Farkas-szorót a (2.57) fejlődési egyenlethez mint kényszerhez, és alkalmazzuk Liu eljárását a konstitutív függvényekre, hogy meghatározzuk megengedett formájukat:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \partial_t \hat{s}(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}) + \partial_i \hat{J}^i(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}) - \hat{\lambda} \left(\partial_t \mathbf{a} + \partial_i \hat{\mathbf{j}}^i(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}) \right) = \\ &= \partial_{\mathbf{a}} \hat{s} \partial_t \mathbf{a} + \partial_{\partial_i \mathbf{a}} \hat{s} \partial_{it} \mathbf{a} + \partial_{\mathbf{a}} \hat{J}^i \partial_i \mathbf{a} + \partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{J}^i \partial_{ij} \mathbf{a} - \hat{\lambda} \left(\partial_t \mathbf{a} + \partial_{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{j}}^i \partial_i \mathbf{a} + \partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{\mathbf{j}}^i \partial_{ij} \mathbf{a} \right) = \\ &= \left(\partial_{\mathbf{a}} \hat{s} - \hat{\lambda} \right) \underline{\partial_t \mathbf{a}} + \partial_{\partial_i \mathbf{a}} \hat{s} \underline{\partial_{it} \mathbf{a}} + \left(\partial_{\mathbf{a}} \hat{J}^i - \hat{\lambda} \partial_{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{j}}^i \right) \partial_i \mathbf{a} + \left(\partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{J}^i - \hat{\lambda} \partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{\mathbf{j}}^i \right) \underline{\partial_{ij} \mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Az alapmezők aláhúzott parciális deriváltjai nincsenek benne a konstitutív állapotterben, a folyamatirány-teret feszítik ki. Liu tétele értelmében nulla tagok együtthatóiként felírható Liu-egyenletek a következők:

$$\partial_t \mathbf{a} : \quad \partial_{\mathbf{a}} \hat{s} = \hat{\lambda}, \quad (2.59)$$

$$\partial_{it} \mathbf{a} : \quad \partial_{\partial_i \mathbf{a}} \hat{s} = 0^i, \quad (2.60)$$

$$\partial_{ij} \mathbf{a} : \quad \partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{J}^i = \hat{\lambda} \partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{\mathbf{j}}^i. \quad (2.61)$$

Az első egyenlet a Lagrange–Farkas-szorzót az entrópia deriváltjaként határozza meg, a második értelmében az entrópia lokális, független az alapváltozó gradienseitől. A harmadik egyenlet egy megoldása a következő:

$$\hat{J}^i(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}) = \partial_{\mathbf{a}} s(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{J}}^i(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}) + \partial_{\partial_j \mathbf{a}} g(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}), \quad (2.62)$$

ahol $\hat{\mathbf{J}}^i = \partial_{\partial_j \mathbf{a}} g$ a maradék entrópiaáram, g skalármező és feltüntettük a függvények változóit. Maradék entrópiaáramot az irreverzibilis termodinamika keretei között általános formában több szerző is javasol (többek között megfeleltethető a Müller-féle K-vektornak [229]) különféle fizikai tartalommal a konkrét rendszerekben. A fenti, skalármező deriváltjaként megjelenő speciális alak a termodinamikai gondolatmenet következménye, egyszerűen mutatja, miféle módon vezet a második főtételelemzésére használt eljárásunk a pusztán fizikai megfontolások konkretizálására. Megjegyezzük, hogy a fenti, (2.62) forma még nem a teljes megoldása a (2.61) egyenletnek, és a teljes megoldás elemzése nem felesleges [190]. A disszipációs egyenlőtlenség ezek után

$$0 \leq \partial_i \hat{\mathbf{J}}^i + \hat{\mathbf{J}}^i \partial_i (\partial_{\mathbf{a}} \hat{s}). \quad (2.63)$$

Azonosan nulla maradék entrópiaáram feltételezésével $\hat{\mathbf{J}}^i \equiv 0^i$, az entrópiaegyenlőtlenség a klasszikus irreverzibilis termodinamika szokásos erő-áram rendszerére egyszerűsödik. A fenti egyenlőtlenség legegyszerűbb megoldása ugyanis az extenzívek áramsűrűségére, mint konstitutív mennyiségre vonatkoztatva lineáris kapcsolatot ad a termodinamikai intenzív mennyiségek gradiensei, mint termodinamikai erők és az extenzívek áramsűrűségei, mint termodinamikai áramok között:

$$\text{Áram: } \hat{\mathbf{J}}^i, \quad \text{Erő: } \partial_i (\partial_{\mathbf{a}} \hat{s}).$$

Ezt a lineáris kapcsolatot szokás Onsager-féle vezetési törvényeknek nevezni [323]:

$$\hat{\mathbf{J}}^i = \hat{\mathbf{L}}^{ik} \partial_k (\partial_{\mathbf{a}} \hat{s}). \quad (2.64)$$

Itt $\hat{\mathbf{L}}^{ik}$ szimmetrikus része pozitív definit. Ezek után az extenzív mennyiségekre vonatkozó mérlegek a következő egyenletre redukálódnak:

$$\partial_t \mathbf{a} + \partial_i [\mathbf{L}^{ij} \partial_j (\partial_{\mathbf{a}} \hat{s})] = 0. \quad (2.65)$$

Láttuk, hogy a Liu-eljárás megadja az entrópiaprodukció irreverzibilis termodinamikában szokásos formáját, és ugyanakkor az entrópiaáram szokott formája is kiadódik a második főtétele következményeként, elsőrendű nemlokalitás feltételezésével. Az irreverzibilis termodinamika intuitív eljárását a Liu-eljárás megfelelően megalapozza. Megjegyzendő, hogy az entrópiaáram még az irreverzibilis termodinamika fenti legegyszerűbb feltételrendszere esetén sem egészen az, amit a racionális termodinamika és származék elméletei általánosan posztulálnak a Gibbs-Duhem-egyenlőtlenségben [291, 277, 108]. Vegyük továbbá észre azt is, hogy a tisztán térelméleti, kontinuum levezetésünk eredménye a *lokális egyensúly* – nem hipotézisként – mert az entrópiasűrűség csak extenzív változóktól függ és lokális, azaz független az alapváltozó gradienseitől, a (2.60) Liu-egyenlet szerint.

2.7. Egykomponensű folyadékok - másodrendű nemlokalitás a sűrűségben

⁰Eddig a belső változók fejlődési egyenleteit, illetve a klasszikus irreverzibilis termodinamikát vizsgáltam a gyengén nemlokális termodinamikai összefüggések felállítására kidolgozott, Liu-eljárás alapuló módszerrel. Ebben a fejezetben egy konkrétabb példát adok, az egykomponensű folyadékok jól ismert esetét – a klasszikus irreverzibilis termodinamika alapelméletét – vizsgáljuk, de a szokásosnál általánosabban. Az előbbi fejezet elsőrendű gyengén nemlokális konstitutív állapottere helyett másodrendűen gyengén nemlokális állapotteret tekintünk, legalábbis az egyik vizsgált változóban, a sűrűségben. Az egykomponensű folyadékok egyrészt jól ismert példa, és a gyenge nemlokalitások lehetséges szerepe is régóta kutatott kérdés (Korteweg műve 1901-ben jelent meg [161], és nemcsak a sűrűségben, hanem a sebességben is kereshetünk magasabbrendű deriváltakat [62, 153, 92]). Ebben a fejezetben ismertett kutatások további részletei [317, 316]-ban találhatóak, illetve példák hasonló vizsgálatokra, de más irányból és más módszerekkel Dunn és Serrin illetve Capriz munkái [63, 226, 33].

2.7.1. Folyadékmechanika általában

Az egykomponensű folyadékmechanika alapállapotterét a ρ sűrűség, a v^i sebesség és az e_b belsőenergia-sűrűség feszíti ki. A hidrodinamika ezekre az alapmennyiségekre vonatkozó mérlegeken alapul (lásd pl. [114, 271]). A klasszikus folyadékmechanikában a konstitutív állapotteret, a konstitutív függvények értelmezési tartományát nem az alapváltozók és első deriváltjaik, $(\rho, v^i, e_b, \partial_i \rho, \partial_j v^i, \partial_i e_b)$ feszítik ki, ahogy az előző fejezet irreverzibilis termodinamikai megfontolásai alapján gondolhatnánk, mert az objektivitás miatt az konstitutív állapottérből hiányzik a sebesség, a deriváltja viszont már benne van. Ugyancsak figyelemre méltó a belső energia szerepe az alapváltozók között. A megmaradó teljes energia használata itt fel sem merül. A szokásos válasz az első kérdésre az, hogy az objektivitás miatt a (relatív) sebesség nem szerepelhet a konstitutív állapottérben [291]. Erre alapozva a második kérdésre azt mondhatjuk, hogy a teljes energia sem objektív, lévén a belső energia és a kinetikus energia összege. Másrészt a termodinamikai megfontolások a lokális egyensúly használata miatt a belső energiát igénylik, és a sebességet egyáltalán nem kezelik. Az objektivitás kapcsán, illetve az 1.4.2 szakaszban azonban láttuk, hogy egyik érv sem állja meg a helyét, és ezek alkalmazása valójában leszűkíti a folyadékmechanika érvényességi körének megértését, kiterjeszthetőségét és általánosíthatóságát. Az első fejezet megmutatta, hogy a klasszikus termodinamika valójában tartalmazza a sebességet (vagy impulzust) mint termodinamikai változót, az általános elvek tárgyalásakor pedig rámutattam, hogy az objektivitási érvek is hamisak.

Ennek megfelelően a továbbiakban először megmutatom, hogy a Liu-eljárást közvetlenül a természetes változókra alkalmazva – a racionális termodinamika hozzáállásának megfelelően látszólag a lokális egyensúly hipotézise nélkül – hogyan tudjuk megadni a Korteweg-folyadékokra vonatkozó termodinamikai követelményeket. Ezek után pedig a megfelelő lokális termodinamikai megfontolásokkal levezetem ugyanezeket az egyenleteket. Ez utóbbi levezetés jóval egyszerűbb, de kevésbé mutat rá saját korlátaira, és csak akkor alkalmazható, ha van homogén testekre vonatkozó elméle-

⁰ Ez a fejezet a [317, 306] munkáimon alapul.

tünk.¹² A klasszikus kontinuumok alaplérlegeiben azonosított fizikai mennyiségek fogják a megfontolásaink alapját képezni. A tömegmegmaradás:

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v^i) = 0, \quad (2.66)$$

ahol ρ a sűrűség, v^i pedig a baricentrikus sebesség, ezért a tömegnek nincs konduktív árama. Ez pontosan azon a megállapodáson múlik, hogy a nemrelativisztikus kontinuumok esetén a tömeghez rögzítjük a sebességmezőt, azaz a sebesség mindig a tömeg áramlását jellemzi.

Az impulzusmérleg, azaz a Cauchy-egyenlet

$$\partial_t(\rho v^i) + \partial_j(\hat{P}^{ij} + \rho v^i v^j) = 0^i, \quad (2.67)$$

ahol ρv^i az impulzussűrűség és \hat{P}^{ij} a nyomástenzor, az impulzus konduktív áramsűrűsége. Az energia mérlege pedig

$$\partial_t e + \partial_i(\hat{q}^i + e v^i) = 0, \quad (2.68)$$

Itt e a teljes energia sűrűsége, és \hat{q}^i a konduktív áramsűrűsége.

2.7.2. Termodinamikai elemzés

A második főttétel értelmében az entrópia növekszik elszigetelt és forrásmentes fizikai rendszerekben, ezért következményeinek ellenőrzéséhez forrásmentes esetet vizsgálunk. Mivel folyadékokról van szó, az entrópiamérlegben is érdemes szétválasztanunk a konvektív és konduktív áramsűrűségeket, ezért (2.14) mérleget a következő formába írjuk:

$$\partial_t \hat{s} + \partial_i(\hat{J}^i + \hat{s} v^i) \geq 0. \quad (2.69)$$

Tehát most

- az alapállapotteret (ρ, v^i, e) feszíti ki,
- a konstitutív állapotteret pedig $(\rho, \partial_i \rho, \partial_{ij} \rho, v^i, \partial_i v^j, e, \partial_i e)$,
- a konstitutív függvények a következők $\hat{s}, \hat{J}^i, \hat{q}^i$ és \hat{P}^{ij} .

Mivel a sűrűségben másodrendűen gyengén nemlokális állapotteret vettünk figyelembe, ezért a tömegmérleg (2.66) gradiensét is figyelembe kell vennünk további kényszerként az entrópia-egyenlőtlenségben

$$\partial_{it} \rho + \partial_{ij}(\rho v^j) = 0_i, \quad (2.70)$$

A (2.66), (2.70), (2.67) és (2.68) kényszerekhez a $\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}^i, \hat{\Gamma}_i, \hat{\gamma}$ Lagrange–Farkas-szorzókat vezetjük be. Ezután Liu eljárásának kiindulópontja az előző fejezetekhez hasonlóan:

$$\begin{aligned} 0 \leq & \partial_t \hat{s} + \partial_i \hat{J}^i + \partial_i(\hat{s} v^i) - \hat{\lambda} [\partial_t \rho + \partial_i(\rho v^i)] - \hat{\Lambda}^i [\partial_{it} \rho + \partial_{ij}(\rho v^j)] - \\ & \hat{\Gamma}_i [\partial_t(\rho v^i) + \partial_j(\hat{P}^{ij} + \rho v^i v^j)] - \hat{\gamma} [\partial_t e + \partial_i(\hat{q}^i + e v^i)]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

¹² A relativisztikus folyadékok esetén például nincs.

2. Kontinuum-termodinamika

A konstitutív függvények parciális deriváltjait kifejtve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
& \partial_\rho \hat{s} \partial_t \rho + \partial_{\partial_i \rho} \hat{s} \partial_{ti} \rho + \partial_{\partial_{ij} \rho} \hat{s} \partial_{tij} \rho + \partial_{v^i} \hat{s} \partial_t v^i + \partial_{\partial_{ij} v^j} \hat{s} \partial_{tj} v^i + \partial_e \hat{s} \partial_t e + \partial_{\partial_{ie}} \hat{s} \partial_{ti} e + \\
& + \partial_\rho \hat{J}^i \partial_i \rho + \partial_{\partial_j \rho} \hat{J}^i \partial_{ij} \rho + \partial_{\partial_{jk} \rho} \hat{J}^i \partial_{ijk} \rho + \partial_{v^j} \hat{J}^i \partial_i v^j + \partial_{\partial_{kj} v^j} \hat{J}^i \partial_{jk} v^i + \partial_e \hat{J}^i \partial_i e + \partial_{\partial_{je}} \hat{J}^i \partial_{ij} e + \\
& + \partial_i (\hat{s} v^i) - \hat{\lambda} (\partial_t \rho + \rho \partial_i v^i + v^i \partial_i \rho) - \\
& - \hat{\Lambda}^i (\partial_{ti} \rho + \rho \partial_{ij} v^j + v^j \partial_{ij} \rho + \partial_i \rho \partial_j v^j + \partial_j \rho \partial_i v^j) - \\
& - \hat{\Gamma}_i (\rho \partial_t v^i + v^i \partial_t \rho + \rho v^i \partial_j v^j + \rho v^j \partial_j v^i + v^j v^i \partial_j \rho + \partial_\rho \hat{P}^{ij} \partial_j \rho + \partial_{\partial_k \rho} \hat{P}^{ij} \partial_{jk} \rho + \\
& + \partial_{\partial_{kl} \rho} \hat{P}^{ij} \partial_{jkl} \rho + \partial_{v^k} \hat{P}^{ij} \partial_j v^k + \partial_{\partial_l v^k} \hat{P}^{ij} \partial_{jl} v^k + \partial_e \hat{P}^{ij} \partial_j e + \partial_{\partial_{ke}} \hat{P}^{ij} \partial_{jke} e) - \\
& - \hat{\gamma} (\partial_t e + e \partial_i v^i + v^i \partial_i e + \partial_\rho \hat{q}^i \partial_i \rho + \partial_{\partial_j \rho} \hat{q}^i \partial_{ji} \rho + \\
& + \partial_{\partial_{jk} \rho} \hat{q}^i \partial_{ijk} \rho + \partial_{v^j} \hat{q}^i \partial_i v^j + \partial_{\partial_{kj} v^j} \hat{q}^i \partial_{ik} v^j + \partial_e \hat{q}^i \partial_i e + \partial_{\partial_{je}} \hat{q}^i \partial_{jie} e) \geq 0.
\end{aligned}$$

A tagok átrendezésével pedig ez adódik:

$$\begin{aligned}
& (\partial_\rho \hat{s} - \hat{\lambda} - \hat{\Gamma}_i v^i) \partial_t \rho + (\partial_{\partial_i \rho} \hat{s} - \hat{\Lambda}^i) \partial_{ti} \rho + \partial_{\partial_{ij} \rho} \hat{s} \partial_{tij} \rho + (\partial_{v^i} \hat{s} - \rho \hat{\Gamma}_i) \partial_t v^i + \\
& + \partial_{\partial_{ij} v^j} \hat{s} \partial_{tj} v^i + (\partial_e \hat{s} - \hat{\gamma}) \partial_t e + \partial_{\partial_{ie}} \hat{s} \partial_{ti} e + \\
& + (\partial_{\partial_{jk} \rho} \hat{J}^i - \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_{jk} \rho} \hat{P}^{li} - \partial_{\partial_{jk} \rho} \hat{q}^i) \partial_{ijk} \rho + \\
& + (\partial_{\partial_{kv} v^j} \hat{J}^i - \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_{kv} v^i} \hat{P}^{lj} - \hat{\gamma} \partial_{\partial_{kv} v^i} \hat{q}^j \partial_{ik} v^j) \partial_{jk} v^i - \hat{\Lambda}^i \rho \partial_{ij} v^j + \\
& + (\partial_{\partial_{je}} \hat{J}^i - \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_{je}} \hat{P}^{lj} + \hat{\gamma} \partial_{\partial_{je}} \hat{q}^i) \partial_{ije} + \\
& + \partial_\rho \hat{J}^i \partial_i \rho + \partial_{\partial_j \rho} \hat{J}^i \partial_{ij} \rho + \partial_{v^j} \hat{J}^i \partial_i v^j + \partial_e \hat{J}^i \partial_i e + \\
& + \partial_i (\hat{s} v^i) - \hat{\lambda} (\rho \partial_i v^i + v^i \partial_i \rho) - \\
& - \hat{\Lambda}^i (\rho \partial_{ij} v^j + v^j \partial_{ij} \rho + \partial_i \rho \partial_j v^j + \partial_j \rho \partial_i v^j) - \\
& - \hat{\Gamma}_i (\rho v^i \partial_j v^j + \rho v^j \partial_j v^i + v^j v^i \partial_j \rho + \partial_\rho \hat{P}^{ij} \partial_j \rho + \partial_{\partial_k \rho} \hat{P}^{ij} \partial_{jk} \rho + \\
& + \partial_{v^k} \hat{P}^{ij} \partial_j v^k + \partial_e \hat{P}^{ij} \partial_j e) - \\
& - \hat{\gamma} (e \partial_i v^i + v^i \partial_i e + \partial_\rho \hat{q}^i \partial_i \rho + \partial_{\partial_j \rho} \hat{q}^i \partial_{ji} \rho + \partial_{v^j} \hat{q}^i \partial_i v^j + \partial_e \hat{q}^i \partial_i e) \geq 0.
\end{aligned}$$

Ekkor a Liu-egyenletek a folyamatiránytér tagjainak együttthatóiként olvashatóak le

$$\partial_t \rho : \quad \partial_\rho \hat{s} - \hat{\lambda} - \hat{\Gamma}_i v^i = 0, \quad (2.72)$$

$$\partial_{ti} \rho : \quad \partial_{\partial_i \rho} \hat{s} - \hat{\Lambda}^i = 0^i, \quad (2.73)$$

$$\partial_{tij} \rho : \quad \partial_{\partial_{ij} \rho} \hat{s} = 0^{ij}, \quad (2.74)$$

$$\partial_t v^i : \quad \partial_{v^i} \hat{s} - \rho \hat{\Gamma}_i = 0_i, \quad (2.75)$$

$$\partial_{tj} v^i : \quad \partial_{\partial_{jv} v^i} \hat{s} = 0_i^j, \quad (2.76)$$

$$\partial_t e : \quad \partial_e \hat{s} - \hat{\gamma} = 0, \quad (2.77)$$

$$\partial_{ti} e : \quad \partial_{\partial_{ie}} \hat{s} = 0^i, \quad (2.78)$$

$$\partial_{ijk} \rho : \quad \partial_{\partial_{(kj} \rho} \hat{J}^i) = \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_{(kj} \rho} \hat{P}^{li} + \hat{\gamma} \partial_{\partial_{(kj} \rho} \hat{q}^i), \quad (2.79)$$

$$\partial_{jk} v^i : \quad \partial_{\partial_{(kv} v^i} \hat{J}^j) = \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_{(kv} v^i} \hat{P}^{lj} + \hat{\gamma} \partial_{\partial_{(kv} v^i} \hat{q}^j) + \frac{\rho}{2} \hat{\Lambda}^l (\delta_l^j \delta_i^k + \delta_l^k \delta_i^j), \quad (2.80)$$

$$\partial_{ije} : \quad \partial_{\partial_{(je} \hat{J}^i) = \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_{(je} \hat{P}^{lj} + \hat{\gamma} \partial_{\partial_{(je} \hat{q}^i). \quad (2.81)$$

(2.74), (2.76) és (2.78) következtében az entrópiásűrűség nem függ $\partial_{ij}\rho$ -tól, $\partial_j v^i$ -től és $\partial_i e$ -től. (2.72), (2.73), (2.75) és (2.77) megadják a Lagrange–Farkas-szorzókat az entrópia deriváltjaiként. Ezért termodinamikai szempontból a Lagrange–Farkas-szorzók a szokásos és gradiens értelemben általánosított termodinamikai intenzív mennyiségeknek felelnek meg [158]. Figyeljük meg, hogy itt már az együttthatók szimmetriáját nem söpörhettük egy konstitutív függvénybe, a (2.80) egyenletben kihasználtuk azt. Ezek után megadhatjuk a (2.79)–(2.81) egyenletrendszer egy megoldását a következőképpen:

$$\hat{j}^i = \partial_e \hat{s} \hat{q}^i + \frac{\rho}{2} (\partial_{\partial_i \rho} \hat{s} \partial_j v^j + \partial_{\partial_j \rho} \hat{s} \partial_j v^i) + \frac{1}{\rho} \partial_{v^j} \hat{s} \hat{P}^{ji} + \hat{\mathfrak{J}}^i(\rho, \partial_i \rho, v^i, e), \quad (2.82)$$

ahol a $\hat{\mathfrak{J}}^i$ maradék entrópiaáram tetszőleges függvénye lehet változóinak. Ilyen módon a Liu-egyenletek teljesen megoldhatóak és a Lagrange–Farkas-szorzókon felül a megszorításokat adnak az entrópiásűrűség és entrópiaáram lehetséges függvényalakjára vonatkozóan. A megoldást a disszipációs egyenlőtlenségre alkalmazva kapjuk, hogy

$$0 \leq \sigma_s = \partial_i \hat{\mathfrak{J}}^i + \hat{q}^i \partial_i (\partial_e (\rho \hat{s})) + \hat{P}^{ij} \partial_i (\partial_{v^j} \hat{s}) + \partial_j v^j \left[\hat{s} + e \partial_e \hat{s} - \rho \partial_\rho \hat{s} + \frac{\rho^2}{2} \partial_i (\partial_{\partial_i \rho} \hat{s}) \right] + \partial_j v^i \left[\frac{\rho^2}{2} \partial_i (\partial_{\partial_j \rho} \hat{s}) \right].$$

Itt bevezettük a fajlagos entrópiát, $\hat{s} := \hat{s}/\rho$ jelöléssel. Az egyenlet hagyományos formájának felírásához a belső energiát kell definiálnunk a szokásos módon, a teljes és kinetikus energia különbségeként. Feltételezzük, hogy az entrópia a belsőenergia-sűrűség függvénye, azaz: $\hat{s} = \hat{s}(\rho, \partial_i \rho, e - \rho v^2/2)$. Továbbá az entrópiát, mint additív (extenzív) fizikai mennyiséget akarjuk definiálni, ezért a szokott módon megköveteljük, hogy a fajlagos entrópia csak az \mathbf{e}_b fajlagos belső energiától függjön:

$$\hat{s}(\rho, \partial_i \rho, v^i, e) = \rho \hat{s}(\rho, \mathbf{e}_b, \partial_i \rho), \quad (2.83)$$

ahol $\mathbf{e}_b = e/\rho - v^2/2$. Ezekkel a mennyiségekkel a disszipációs egyenlőtlenséget és az entrópiaáramot átírva kapjuk, hogy

$$0 \leq \sigma_s = \partial_i \hat{\mathfrak{J}}^i + (\hat{q}^i - v_j \hat{P}^{ij}) \partial_i \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \left(\hat{P}^{ij} - \left(p + \frac{T \rho^2}{2} \partial_k (\partial_{\partial_k \rho} \hat{s}) \right) \delta_j^i - \frac{T \rho^2}{2} \partial_j (\partial_{\partial_i \rho} \hat{s}) \right) \partial_i v^j, \quad (2.84)$$

$$\hat{j}^i = (\hat{q}^i - v_j \hat{P}^{ji}) \frac{1}{T} + \frac{\rho^2}{2} (\partial_{\partial_i \rho} \hat{s} \partial_j v^j + \partial_{\partial_j \rho} \hat{s} \partial_j v^i) + \hat{\mathfrak{J}}^i. \quad (2.85)$$

Láthatjuk, hogy mindkét kifejezésben felbukkan a belső energia árama a szokásos, elsőrendű elméletekben megszokott módon $q^i = \hat{q}^i - v_j \hat{P}^{ji}$.

A fejezet további részében a térderiváltak absztrakt indexes jelölésmódjáról átváltunk a folyadékmechanikában szokásosabb nabla jelölésre. Ekkor például $\partial_i v^i = \nabla \cdot \mathbf{v}$ és $\partial_i v^j = \nabla \mathbf{v}$. A mechanikai szempontból disszipációmentes esetben a mechanikai kölcsönhatásra vonatkozó termodinamikai erő nulla. Ilyen folyadékok nyomását *reverzibilisnek* hívhatjuk:

$$\hat{\mathbf{P}}^r = \frac{T \rho^2}{2} [(\nabla \cdot \partial_{\nabla \rho} \hat{s} - 2 \partial_\rho \hat{s}) \mathbf{I} + \nabla \partial_{\nabla \rho} \hat{s}]. \quad (2.86)$$

2. Kontinuum-termodinamika

Ha az elmélet lokális, az entrópia független a sűrűség deriváltjától és azt kapjuk, hogy

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{Euler}}^r(\rho) := -T\rho^2\partial_\rho\hat{s}(\rho)\mathbf{I}. \quad (2.87)$$

Az ilyen folyadékot Euler-folyadéknak nevezik, és felismerhetjük a $p(\rho) = -T\rho^2\partial_\rho\hat{s}(\rho)$ skaláris nyomást az egyenletben. A \mathbf{P}^v viszkózus nyomást szokás szerint bevezetve megoldhatjuk a disszipációs egyenlőtlenséget, és a vezetési egyenleteket a szokásos lineáris formában írhatjuk elő:

$$\hat{\mathbf{P}}^v := \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}}^v = \mathbf{L} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (2.88)$$

Itt \mathbf{L} pozitív szemidefinit konstitutív függvény. Vegyük észre, hogy ha \hat{s} független a sűrűség gradiensétől, \mathbf{L} állandó, $\hat{\mathbf{P}}^v$ pedig izotrop függvénye a sebességgradiensnek, akkor a hagyományos Navier-Stokes-folyadék egyenleteit kapjuk vissza. A nyomás reverzibilis részének egyfajta potenciál tulajdonsága van, azaz létezik egy olyan \hat{U} skalár értékű függvény, hogy

$$\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{P}}^r}{T} = \rho \nabla \hat{U}. \quad (2.89)$$

\hat{U} a fajlagos entrópiából számolható:

$$\hat{U} = \nabla \cdot (\rho \partial_{\nabla \rho} \hat{s}) - \partial_\rho(\rho \hat{s}). \quad (2.90)$$

Ezért mechanikailag nem disszipatív folyadékok esetén az impulzusmérleg ekvivalensen átalakítható:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{P}}^r = \mathbf{0} \iff \rho \dot{\mathbf{v}} + T\rho \nabla \hat{U} = \hat{\mathbf{P}}^r : \nabla \frac{1}{T}. \quad (2.91)$$

Ezzel megadtuk és jellemeztük a Korteweg-folyadékok egy termodinamikailag megengedett családját.

2.7.3. Lokális és gyengén nemlokális egyensúly

Az előző fejezet általános módszert ad az egyenletek származtatására, nagyon kevés feltevéssel. Egy jóval egyszerűbb, de heurisztikusabb, azaz több feltevést igénylő levezetést kaphatunk, ha gradiensfüggő entrópiát a kezdetektől megengedünk. Ez úgy is értelmezhető, hogy a térderivált jellegű termodinamikai változókat is homogén testeknek megfelelően alkalmazzuk a kontinuumelmélet kidolgozására. Ezek alapján megadhatjuk a klasszikus termodinamika gyengén nemlokális általánosításán alapuló tér-elméletet, a lokális egyensúly hipotézisének mintájára bevezetve a *gyengén nemlokális egyensúly* hipotézisét. Jelen esetben az előző fejezetből láthatjuk, hogy a Gibbs-reláció helyes formája:

$$de = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho - A^i d\partial_i \rho, \quad (2.92)$$

ahol $A^i = T\partial_{\partial_i \rho} s$, és elhagytuk a konstitutív mennyiségek jelölésére használt kalapot. Ennek megfelelően az (1.3) potenciál-tulajdonság általánosítása és a Gibbs–Duhem-reláció pedig a következő:

$$\mathbf{e} = T\mathbf{s} - \frac{p}{\rho} - A^i \partial_i \rho + \mu, \quad d\mu = -sdT + \frac{1}{\rho}dp - \partial_i \rho dA^i. \quad (2.93)$$

A szokásos lokális egyensúly esetén az entrópia független a sűrűséggradienstől. Ebben az esetben természetesen visszkapjuk a Gibbs-reláció megszokott, (1.6) formulát. Érdekességgéppen megadjuk a megfelelő teljes termodinamikai testre vonatkozó Gibbs-reláció sűrűségben elsőrendűen nemlokális általánosítását is:

$$dE = TdS - pdV + \mu dN - A^i d(M\partial_i \rho), \quad (2.94)$$

ahol $M = Nm$ a tömeg, m a részecsketömeg, lásd az 1.2. fejezet eleje. Az utolsó tagot megfigyelve látható, hogy a homogén gradiens feltételezése esetén nem egészen természetes a megfelelő „extenzív” mennyiség kiválasztása.

A továbbiakhoz érdemes szubsztanciális deriváltakat bevezetnünk. A tömegmegmaradás a lokális (2.66) helyett a következő:

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.95)$$

A belső energia mérlegét a teljes és a kinetikus energia mérlegeiből kaphatjuk a szokott módon [113, 323]:

$$\rho \dot{e}_b + \partial_i q^i = P^{ij} \partial_i v_j. \quad (2.96)$$

Rá kell jönnünk még valahogy az entrópiaáram (2.85) formájára. Ha ezt tudjuk, akkor az entrópia mérlege a következőképpen fejthető ki:

$$\begin{aligned} \rho \dot{s} + \partial^i j^i &= \rho \frac{\dot{e}_b}{T} + \frac{p}{\rho} \dot{\rho} - \rho \frac{A^i}{T} \frac{d}{dt} \partial_i \rho + \partial_i \left[\frac{q^i}{T} + \frac{\rho^2}{2T} (A^i \partial_j v^j + A^k \partial_k v^i) \right] \\ &= q^i \partial_i \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \left[\hat{P}^{ij} - \left(p + \frac{T\rho^2}{2} \partial_k A^k \right) \delta_j^i - \frac{T\rho^2}{2} \partial_j A^i \right] \partial_i v^j \geq 0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Itt behelyettesítettük a (2.95) tömeg- és a (2.96) energiamérleg időderiváltjait, illetve felhasználtuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \partial_i \rho = -\partial_i \rho \partial_k v^k - \partial_k (\rho \partial_i v^k). \quad (2.98)$$

Láthatóan visszakaptuk a entrópiaprodukció (2.84) alakját, sokkal egyszerűbb számítások után.

Amenyiben az entrópiaáram és a Gibbs-reláció is a megszokott formájú, azaz

$$de = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad j^i = \frac{q^i}{T}, \quad (2.99)$$

akkor pedig visszkapjuk az entrópiaprodukciót a szokott formában, ahogy a Navier-Stokes-Fourier-egyenletek származtatásához szükséges:

$$0 \leq \rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \rho \frac{\dot{e}_b}{T} + \frac{p}{\rho} \dot{\rho} + \partial_i \left(\frac{q^i}{T} \right) = q^i \partial_i \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \left(\hat{P}^{ij} - p \delta_j^i \right) \partial_i v^j. \quad (2.100)$$

2.7.4. Schrödinger–Madelung-folyadék

Ezt a speciális Korteweg-folyadékot kapjuk, ha

$$\hat{s}_{\text{SchM}}(\mathbf{e}_b, \rho, \nabla \rho) = \hat{s} \left(\mathbf{e}_b - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial_i \rho}{2\rho} \right)^2 \right), \quad (2.101)$$

ahol ν pozitív állandó. Szorítkozzunk most a tisztán mechanikai esetre. Ezért tegyük fel a továbbiakban, hogy a hőmérséklet homogén, azaz $\partial_i T = 0$.

A reverzibilis nyomás ekkor

$$\mathbf{P}^r = -\frac{\nu}{8} \left(\Delta \rho \mathbf{I} + \nabla^2 \rho - \frac{2 \nabla \rho \circ \nabla \rho}{\rho} \right), \quad (2.102)$$

ahol \circ a tenzorszorzat egyezményes jele a folyadékmechanikában. A potenciál:

$$U = -\frac{\nu}{4T_0\rho} \left(\Delta \rho - \frac{(\nabla \rho)^2}{2\rho} \right) = -\frac{\nu}{2T_0} \frac{\Delta R}{R}, \quad (2.103)$$

ahol T_0 a homogén hőmérséklet, és az $R = \sqrt{\rho}$ mennyiség bevezetésével látszik, hogy (2.103) a de Broglie–Bohm-féle kvantumpotenciálja lesz egy m tömegű részecskének elosztva a T_0 hőmérséklettel, ha $\nu = \hbar^2/m^2$ [27, 126].

A Schrödinger–Madelung-folyadék entrópiaáram-sűrűsége

$$\mathbf{J}_{\text{SchM}} = -\frac{1}{T} \left[-\mathbf{q} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}^{rev} + \frac{\nu}{8} (\nabla \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \rho \cdot \nabla \mathbf{v}) \right]. \quad (2.104)$$

Megjegyzések

A fajlagos entrópia fenti speciális, (2.101) függvényalakja nagyon egyszerűen megindokolható, ha a folyadék sűrűségét egyfajta részecske-tartózkodási valószínűségi-sűrűségként értelmezzük, kvantummechanikai alapon. Ugyanis ekkor két folyadék (illetve részecske), együttes leírásához természetes módon vezethetjük be a $\rho_{12}(r_1^i, r_2^j)$ valószínűségi-sűrűséget a két folyadék(-részecske) együttes tartózkodási valószínűségének leírására a tér két, r_1^i és r_2^j pontjában. Tehát két független folyadék esetén az egyfolyadék- és kétfolyadék-sűrűségek közötti viszony természetes módon szorzat formájú: $\rho_{12}(r_1^i, r_2^i) = \rho_1(r_1^i) \rho_2(r_2^i)$, azaz röviden $\rho_{12} = \rho_1 \rho_2$. Ilyen megfontolások természetesek a statisztikus fizikában is, bár szokatlanok egy többkomponensű kontinuum-elméletben.

Az entrópia viszont, ismét csak természetes módon, akkor ír le független fizikai rendszereket, ha ilyen változók esetén additív függvényként viselkedik. Gyengén nem-lokális folyadék esetén tehát az entrópiától elvárjuk a következő tulajdonságot:

$$\hat{s}(\rho_1 \rho_2, D(\rho_1 \rho_2)) = \hat{s}(\rho_1, D(\rho_1)) + \hat{s}(\rho_2, D(\rho_2)), \quad (2.105)$$

Ahol $D = (\partial_{r_1^i}, \partial_{r_1^i})$ a valószínűségi-sűrűség teljes deriváltja. Ennek a függvényegyenletnek pedig egyértelmű (!) a megoldása, ha az entrópia izotrop függvény [301]:

$$s(\rho) = k \ln \rho + \nu \left(\frac{\partial_i \rho}{\rho} \right)^2, \quad (2.106)$$

Itt k és ν állandók.

Az entrópia extenzív mennyiség, elsőrendű homogén függvénye a változóinak. A fajlagos entrópia nulladrendű homogén függvénye a teljes entrópia eredeti változóinak, ezért csak a fajlagos mennyiségektől függhet, de az extenzivitás nem ad megszorítást $s(\mathbf{e}_b, \rho, \partial_i \rho)$ formájára. Ha a sűrűség valóban a tartózkodási valószínűségekre jellemző, akkor egyenletesen megnövelve nem szabad változtassa a kontinuum entrópiáját. Azaz, ha különböző tömegű részecskéket ugyanazzal az egyenlettel akarunk leírni, akkor a fajlagos entrópiára igaz, hogy

$$s(\mathbf{e}_b, \lambda \rho, \lambda \partial_i \rho) = s(\mathbf{e}_b, \rho, \partial_i \rho). \quad (2.107)$$

Ez a tulajdonság, amelyet tömegskála-függetlenségnek nevezhetünk, kizárja a logaritmikus tagot (2.106)-ból és biztosítani fogja a részecskeszerű viselkedést. Ha a sűrűség-gradienstől való függést egyfajta korrekciónak tekintjük, amely első rendben kvadratikusan korrigálja az energiát, $s(\mathbf{e}_e, \rho, \partial_i \rho) = s(\mathbf{e}_b - \nu(\rho)(\partial_i \rho)^2)$ formában, akkor a fenti tulajdonság, a tömegskála-függetlenség, szintén a (2.101) fajlagos entrópiára vezet.

Schrödinger-egyenlet

Ha a Schrödinger–Madelung-folyadék örvénymentes, azaz $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor a tömeg- és impulzusmérlegek együtt a Schrödinger-egyenletet adják. Ugyanis ekkor a (2.67) egy Bernoulli-egyenletből vezethető le (egy adott vonatkoztatási rendszerben), és bevezetve az S skalár sebességpotenciált a

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla S \quad (2.108)$$

definícióval megkapjuk a Bernoulli-egyenletet, ha észrevesszük, hogy (2.91) második fele a

$$\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} - U = 0 \quad (2.109)$$

egyenlet gradiense. Ezek után az úgynevezett Madelung-transzformáció segítségével bevezethetjük a $\psi = R e^{iS}$ függvényt, ahol $R = \sqrt{\rho}$ és i a képzetes egység. (2.66)-at megszorozva $i\hbar e^{iS}/(2R)$ -el, (2.109) egyenletet pedig $m R e^{iS}$ -el, egyetlen komplex egyenletbe egyesíthetjük a tömeg- és impulzusmérleget, és megkapjuk az m tömegű szabad részecskére vonatkozó Schrödinger-egyenletet:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi. \quad (2.110)$$

Ez a levezetés megmutatja, hogy az általános módszerünkkel kapott gyengén nemlokalis folyadékok nagy családjá nem üres. Sőt, a speciális további feltételekkel a Schrödinger–Madelung-egyenletre egyszerűsített elméletünk fizikai rendszerek igen nagy családjának jó modellje.

2.7.5. Összefoglalás

A Liu-eljárás nagyon általános feltételek mellett konstruktív módszert ad fizika törvényeinek elemzésére a második főtétele szempontjából. Egyaránt módszert ad ismert

egyenletek kiegészítésére, általánosítására és új egyenletek konstrukciójára is. Fontos észrevennünk, hogy nemcsak a disszipatív, hanem a nulla entrópiaprodukciójú részre is megszorításokat kaptunk. Olyan megszorításokat, amelyek általában Hamilton típusú variációs elvből származtatott Euler-Lagrange-egyenlet formájúak [306].

Vegyük észre továbbá, hogy a valószínűségi folyadékokra levezetett (2.107) forma a klasszikus Boltzmann-Gibbs-entrópiasűrűség, egy Fischer-információs taggal kiegészítve. Ennek bizonyos következményeit, a Jaynes-féle gondolatmenet gyengén nemlokális entrópiafüggvényekre bevezetett általánosítását vizsgálja [301].

A termodinamikai megközelítés sajátos rálátást ad a kvantummechanikára. Egyrészt többféle disszipációs mechanizmus vezethető be és elemezhető, illetve a termodinamika, mint stabilitási elmélet is tesztelhető. Érdemes megjegyezni, hogy (2.106) logaritmikus tagot is tartalmazó entrópiaformája hasonlóan logaritmikus kiegészítéshez vezet a Schrödinger-egyenletben. Ez az úgynevezett Bialyniczki-Birula-egyenlet, egyike a legtöbbet vizsgált nemlineáris kiegészítéseknek [23, 333]. A legegyszerűbb disszipációs forma, amit vizsgálhatunk, a Bohm típusú egyenlethez adott sebességgel arányos csillapítás. Ez az ún. Schrödinger-Langevin-egyenletre vezet [163], amit kanonikus kvantálással is megkaphatunk. A fenti termodinamikai megfontolások segítségével ezekhez a disszipatív kvantummechanikákhoz Ljapunov-függvény konstruálható a stacionárius megoldások stabilitásának vizsgálatára adott peremfeltételek mellett [316].¹³

2.8. Homogén és kontinuum

Az előző fejezetben már szó volt róla, hogy a homogén egyenletek, illetve a Gibbs-reláció gyengén nemlokális általánosítása hogyan vezet a kontinuumelméletig. Ebben az alfejezetben a fordított viszonyt vizsgáljuk. Belátjuk a folyadékegyenletek generikus stabilitását, és megmutatjuk, hogy a termodinamikai test megfelelő definíciójával visszakaphatók a homogén testek termodinamikájának differenciálegyenletei.

2.8.1. Generikus stabilitás

⁰Ahogy a fejezet elején említettük, a homogén egyensúly lineáris stabilitása, az úgynevezett generikus stabilitás termodinamikai alapkövetelmény, legalábbis, ha a második főtétele nemegyensúlyi termodinamikai értelmezése fennáll. Egykomponensű, hővezető, disszipatív folyadékok esetén részletesen megvizsgáljuk ezt a kérdést.

A relativisztikus jelölésekkel történő könnyebb összehasonlíthatóság végett a (2.66) tömegmérleget, a (2.67) impulzusmérleget és a belső energia (2.96) mérlegét a következő formára alakítjuk:

$$\dot{\rho} + \rho \partial_i v^i = 0 \quad (2.111)$$

$$\dot{z}^i + z^i \partial_j v^j + \partial_j P^{ij} = 0^i. \quad (2.112)$$

$$\dot{e} + e \partial_i v^i + \partial_i q^i = - P^{ij} \partial_j v_i. \quad (2.113)$$

¹³Érdekes megjegyezni továbbá, hogy a hidrodinamikai modellt Madelung a Schrödinger-egyenlet megjelenése után kb. fél évvel publikálta [270, 195] és Jánossy Lajos vizsgálta részletesen [138]-[150].

⁰Ez a fejezet a [305] munkámon alapul.

ahol a pont a szubsztanciális deriváltat jelöli és $z^i = \rho v^i$ az impulzussűrűség. A (2.100) entrópiamérlegben a termodinamikai erők és áramok, azaz az energiaáram és a hőmérséklet gradiense, illetve a szimmetrikus, viszkózus feszültségtenzor és a sebességgradiens között lineáris összefüggést feltételezve kapjuk a Fourier-törvényt és a Newton-féle feszültségtenzort:

$$q^i = \lambda \partial^i \frac{1}{T} = -\lambda_F \partial^i T, \quad (2.114)$$

$$P^{ij} - p\delta^{ij} = \Pi^{ij} = -\eta(\partial^i v^j + \partial^j v^i - \frac{2}{3}\partial_k v^k \delta^{ij}) - \eta_v \partial_k v^k \delta^{ij}. \quad (2.115)$$

A nemnegatív entrópiaprodukció akkor teljesül, ha a λ_F Fourier-hővezetési tényező, a η nyíró és η_v térfogati viszkozitás pozitív.

$$\lambda > 0, \quad \eta > 0, \quad \eta_v > 0. \quad (2.116)$$

A termodinamikai stabilitást, azaz az entrópia konkávitásának sűrűségekre vonatkozó (1.15) feltételrendszerét kifejtve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} < 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu}{T} > 0, \\ \Delta = -\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu}{T} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial e} \frac{\mu}{T} = -\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu}{T} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} \right)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Itt felhasználtuk az entrópia második vegyes parciális deriváltjainak egyenlőségét $\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} = -\frac{\partial}{\partial e} \frac{\mu}{T}$, és bevezettük a Δ jelölést az entrópiasűrűség második deriváltjának determinánsára.

Egyensúly és linearizálás

Termodinamikai egyensúlyban a szubsztanciális időderiváltak és a disszipatív áramok egyaránt nullák: $q^i = 0$, $P^{ij} = p\delta^{ij}$. Ekkor (2.114) és (2.115) következtében $T(\varepsilon, \rho) = \text{áll.}$ és a sebességmező is divergenciamentes és gradiensének szimmetrikus része is nulla, azaz $\partial_j v^j = 0$ és $\partial_i v^j = \partial_j v^i$. Tehát (2.111) alapján a kémiai potenciál is állandó, $\mu(\varepsilon, \rho) = \text{áll.}$ A termodinamikai stabilitás (2.117) egyenlőtlenségei pedig biztosítják az állapotfüggvények megfelelő invertálhatóságát, így $e = \text{áll.}$ és $\rho = \text{áll.}$ Feltételezzük továbbá, hogy a sebességmező rotációmentes, tehát összességében véve állandó. Ekkor az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy nulla. Összességében az egyensúlyi mezők a következők

$$\begin{aligned} \rho(x^j, t) = \bar{\rho} = \text{áll.}, \quad e(x^j, t) = \bar{e} = \text{áll.}, \quad v^i(x^j, t) = 0^i, \\ j^j(x^i, t) = 0^j, \quad q^j(x^i, t) = 0^j, \quad \Pi^{ij}(x^k, t) = P^{ij}(x^k, t) - p(\bar{e}, \bar{\rho})\delta^{ij} = 0^{ij}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Jelölje a perturbált mezőket $(\delta\rho, \delta e, \delta v^i, \delta q^i, \delta \Pi^{ij})$. A (2.111)–(2.113) egyenleteket

2. Kontinuum-termodinamika

a fenti egyensúly körül linearizálva

$$0 = \dot{\delta\rho} + \bar{\rho}\partial_j\delta v^j, \quad (2.119)$$

$$0 = \dot{\delta e} + (\bar{\varepsilon} + \bar{p})\partial_j\delta v^j + \partial_j\delta q^j, \quad (2.120)$$

$$0^i = \bar{\rho}\dot{\delta v}^i + \partial_i p + \partial_j\delta\Pi^{ij} = \bar{\rho}\dot{\delta v}^i + \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\varepsilon}\partial^i\delta e + \frac{\partial\bar{p}}{\partial\rho}\partial^i\delta\rho\right) + \partial_j\delta\Pi^{ij}, \quad (2.121)$$

$$0^i = \delta q^i - \lambda\partial^i\frac{1}{T} = \delta q^i - \lambda\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{T}\partial^i\delta e + \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{T}\partial^i\delta\rho\right), \quad (2.122)$$

$$0 = \delta\Pi^{ij} + \eta_v\partial_k\delta v^k\delta^{ij} + \eta\left(\partial^i\delta v^j + \partial^j\delta v^i + \frac{2}{3}\partial_k\delta v^k\delta^{ij}\right). \quad (2.123)$$

Felülvonással a megfelelő függvény egyensúlyi értékét jelöltük, pl. $\bar{p} = p(\bar{\varepsilon}, \bar{\rho})$.

Az instabilitások vizsgálatához a megoldásokat a következő formában keressük: $\delta Q = Q_0 e^{\Gamma t + ikx}$, ahol Q_0 állandó, k valós és Γ komplex. Mivel az egyensúlyban nyugvó folyadék sebessége nulla, ezért a szubsztanciális időderivált parciális lesz $d/dt = \partial_t$. Ezekkel a feltételekkel a perturbált egyenletek

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma\delta\rho + ik\bar{\rho}\delta v^x, \\ 0 &= \Gamma\delta e + (\bar{\varepsilon} + \bar{p})ik\delta v^x + ik\delta q^x, \\ 0 &= \Gamma\bar{\rho}\delta v^x + ik\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\varepsilon}\delta e + \frac{\partial\bar{p}}{\partial\rho}\delta\rho\right) + ik\delta\Pi^{xx}, \\ 0 &= \Gamma\bar{\rho}\delta v^y + ik\delta\Pi^{xy}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma\bar{\rho}\delta v^z + ik\delta\Pi^{xz}, \\ 0 &= \delta q^x - ik\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{T}\delta e + \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{T}\delta\rho\right), \\ 0 &= \delta q^y = \delta q^z, \\ 0 &= \delta\Pi^{xx} + ik\left(\frac{8}{3}\eta + \eta_v\right)\delta v^x, \\ 0 &= \delta\Pi^{xy} + ik\eta\delta v^y, \\ 0 &= \delta\Pi^{xz} + ik\eta\delta v^z, \\ 0 &= \delta\Pi^{yy} + ik\eta_v\delta v^y, \\ 0 &= \delta\Pi^{zz} + ik\eta_v\delta v^z, \\ 0 &= \delta\Pi^{zy}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Ezek a fenti egyenletek az alábbi mátrixformába írhatóak:

$$M_B^A \delta Q^B = 0, \quad (2.126)$$

ahol δQ a Fourier–Navier–Stokes-folyadék perturbált komponens mezőit jelöli a következő módon:

$$\begin{aligned} \delta Q &= (\delta\rho, \delta e, \delta v^x, \delta q^x, \delta\Pi^{xx}; \\ &\delta v^y, \delta\Pi^{xy}, \delta\Pi^{yy}; \delta v^z, \delta\Pi^{xz}, \delta\Pi^{zz}; \\ &\delta\Pi^{yz}, \delta q^y, \delta q^z). \end{aligned}$$

A 14x14-es M_B^A mátrix ekkor

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (2.127)$$

ahol \mathbf{I} a 3x3-as egységmátrix, az \mathbf{R} és \mathbf{N} almátrixok pedig a következők:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \rho\Gamma & ik & 0 \\ ik\eta & 1 & 0 \\ ik\eta_v & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.128)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & ik\rho & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & ik(e+p) & ik & 0 \\ ik\frac{\partial p}{\partial \rho} & ik\frac{\partial p}{\partial e} & \Gamma\rho & 0 & ik \\ -ik\lambda\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{1}{T} & -ik\lambda\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{T} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ik\tilde{\eta} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.129)$$

ahol $\tilde{\eta} = 8\eta/3 + \eta_v$, és a felülvonást elhagytuk az egyensúlyi mennyiségek fölül.

Exponenciálisan növekvő síkhullámokat akkor kapunk, ha Γ és k megoldása a

$$\det \mathbf{M} = (\det \mathbf{N})(\det \mathbf{R})^2 = 0 \quad (2.130)$$

egyenletnek pozitív valós részű Γ esetén.

Az \mathbf{R} determinánsára vonatkozó egyenlet a $\rho\Gamma + \eta k^2 = 0$ egyenletet adja, negatív Γ megoldással.

\mathbf{N} determinánsa pedig a következő diszperziós relációt eredményezi:

$$\begin{aligned} & \rho\Gamma^3 + \\ & + k^2 \left(\eta - \lambda\rho\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{T} \right) \Gamma^2 + \\ & + k^2 \left(-k^2\eta\lambda\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{T} + (e+p)\frac{\partial p}{\partial e} + \rho\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \Gamma + \\ & + k^4 \rho\lambda \left(\frac{\partial p}{\partial e}\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{1}{T} - \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{T} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.131)$$

A Routh-Hurwitz kritérium értelmében [160] az $a_0\Gamma^3 + a_1\Gamma^2 + a_2\Gamma + a_3 = 0$ harmadfokú polinom gyökeinek valós része pontosan akkor negatív, ha együtthatói pozitívak és $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$. Az együtthatók pozitivitása egyszerűen láthatóan a (2.117) és (2.116) feltételek következménye, ha figyelembe vesszük a következő azonosságokat:

$$\partial_e p = -(e+p)T\partial_e\frac{1}{T} + nT\partial_e\frac{\mu}{T}, \quad (2.132)$$

$$\partial_n p = -(e+p)T\partial_n\frac{1}{T} + nT\partial_n\frac{\mu}{T}, \quad (2.133)$$

$$\partial_n\frac{1}{T} = -\partial_e\frac{\mu}{T}. \quad (2.134)$$

2. Kontinuum-termodinamika

Az utolsó feltétel értelmében pedig

$$\begin{aligned}
 a_1 a_2 - a_0 a_3 = & k^6 \left[-\eta \lambda \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \left(\eta - \lambda \rho \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \right) \right] + \\
 & + k^4 \left\{ (e+p)^2 \left[\rho \lambda \left(\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \right)^2 - \eta \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \right] + (e+p) 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} \left(-\eta + \rho \lambda \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \right) + \right. \\
 & \left. + \rho^2 \left[\eta \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu}{T} + \rho \lambda \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} \right)^2 \right] \right\} \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Az első tag láthatóan nem lehet negatív, ha a termodinamikai feltételek teljesülnek. Az utolsó két sor nemnegativitását legkönnyebben talán úgy láthatjuk, ha észrevesszük, hogy a kifejezés $(e+p)$ másodfokú polinomja. A négyzetes tag együtthatója pozitív, a diszkrimináns pedig a következő formára egyszerűsödik:

$$\text{Disc} = 4\eta\rho^2 \left(-\eta + \rho\lambda \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \right) \Delta \leq 0 \tag{2.136}$$

Mivel a diszkrimináns negatív, a polinom pozitív. Ezzel beláttuk a Fourier–Navier–Stokes-folyadék generikus stabilitását. Megjegyezzük, hogy az előzőekben vizsgált termodinamikai Korteweg-folyadék szintén generikusan stabil a termodinamikai stabilitás [316]-ban adott feltételeivel.

2.8.2. Kontinuum és homogén

A kontinuum termodinamika egyenleteiből nem teljesen triviális homogén testekre vonatkozó egyenleteket kapunk. Ugyanis ha a fenti (2.111)–(2.113) egyenletekben minden mennyiséget homogénnek tekintünk, akkor azt kapjuk, hogy a megfelelő homogén mezők időfüggetlenek, így nem lehetnek időfüggetlen folyamataik [199]. A termodinamikai test egy egyszerű modelljét kapjuk, ha egy összefüggő, a térszerű metszeteken sima határú térrészt tekintünk, amelynek kiterjedése változhat időben és ezt a változást egyetlen paraméterrel jellemezhetjük, célszerűen az idővel. Ilyen a dugattyú és a henger első fejezetben említett példája (1.1 ábra). Tekintsünk most ettől általánosabban a téridő egy t pillanatában egy $H(t)$ halmazt. Legyen ezen a halmazon – a termodinamikai testen – a termodinamikai nyomás és a belső energia is homogén: $\partial^i e = 0$ és $\partial^i p = 0$. Vizsgáljuk először a test energiájának változását, és ehhez rendezzük át a fenti (2.113) belsőenergia-mérleget:

$$\dot{e} + (e+p) \frac{\dot{v}}{v} = -\partial_i q^i - \Pi^{ij} \partial_i u_j. \tag{2.137}$$

Itt v a fajtérfogat. Ezután integráljuk a fenti kifejezést $H(t)$ -re és alkalmazzuk Reynolds transzporttételét (C. függelék):

$$V \dot{e} + V(e+p) \frac{\dot{v}}{v} = \delta Q = - \oint_{\partial H(t)} q^i dA_i - \int_{H(t)} \Pi^{ij} \partial_i u_j dV. \tag{2.138}$$

Itt $V = V(t)$ a $H(t)$ halmaz térfogata és $v = V/M$, ahol M a V térfogatrész anyagának tömege. A jobb oldalon látható időtől függő kifejezést jelöltem δQ -val. Tegyük fel,

hogy a termodinamikai test zárt, azaz tömege nem változik $M = \text{áll.}$, és térjünk át fajlagos belső energiára a belsőenergia-sűrűségről $e = e/v$. Ebben az esetben a fenti kifejezés bal oldala célszerűen átrendezhető:

$$V\dot{e} + V(e + p)\frac{\dot{v}}{v} = vM\frac{d}{dt}\left(\frac{e}{v}\right) + vM\left(\frac{e}{v} + p\right)\frac{\dot{v}}{v} = M\dot{e} + Mp\dot{v} = qM, \quad (2.139)$$

azaz

$$\dot{e} = q - p\dot{v}, \quad (2.140)$$

mely pedig nem más, mint az első főtétele (1.19) differenciálegyenlete, klasszikus mechanikai teljesítmény taggal, és a q fajlagos hőteljesítménnyel, amely (2.138) jobb oldala alapján van értelme.

Ezek után térjünk át a (2.112) impulzusmérleg vizsgálatára. Ennek $H(t)$ -re történő integrálása után kapjuk, hogy

$$\dot{Z}^i = - \oint_H P^{ij} dA_j, \quad (2.141)$$

ahol $Z^i = \int_H \rho v^i dV$ a termodinamikai test teljes impulzusa. Legyen speciálisan a $H(t)$ termodinamikai test a hengerbe zárt gáz az 1.1 ábra szerint, és válasszunk a dugattyú mozgásának irányába vett x tengellyel ellátott, a hengerhez képest nyugvó vonatkoztatási rendszert. Ebben az esetben az impulzusmérlegnek csak az x irányú komponense nem nulla, és az x irányú impulzus

$$Z = \frac{M}{2A} \dot{V} = \frac{M^2}{2A} \dot{v}, \quad (2.142)$$

mert a gáz M tömege állandó, és a dugattyú elmozdulásának fele a gáz tömegközéppontjának elmozdulása. Itt A jelölte a henger keresztmetszetének nagyságát. Mivel (2.141) jobb oldalán a felületre integrált erő szerepel, és erő csak a dugattyúnál fellépő nyomáskülönbség miatt hat a rendszerre, ezért a (2.141) egyszerű termodinamikai rendszerünkben vett x komponense:

$$\frac{M^2}{2A} \ddot{v} = A(p - p_k). \quad (2.143)$$

Tehát visszakaptuk a kiterjesztett közönséges termodinamika (1.33) fajtérfogat változásra vonatkozó differenciálegyenletét, ahol a tehetetlenségi paraméter $\gamma = M^2/(2A^2)$.

2.9. Relokalizálható kontinuumok – hővezetés

2.9.1. Bevezetés – történeti megjegyzések

⁰A hővezetés elmélete a nemegyensúlyi termodinamika próbaterepe. A parabolikus Fourier-egyenlet a termodinamikai eredetű fejlődési egyenletek prototípusa. Ennek okát láttuk a 2.6 fejezetben: az elsőrendűen gyengén nemlokális állapottér, forrásmentes mérlegegyenlet kényszerfeltétellel kikényszeríti az entrópiaprodukció klasszikus irreverzibilis termodinamikában megszokott formáját. Mégis, a Fourier-egyenletnek számos általánosítása van, melyek az egyenlet elvi és gyakorlati hiányosságait hivatottak kijavítani. Egyik gyakran hangoztatott elvi ok, hogy a Fourier-egyenlet parabolikussága végtelen jelterjedési sebességet eredményez, ami fizikailag nem megengedett, ezért mindenképpen valamilyen hiperbolikus elmélet közelítéseként érdemes rátekinteni. Ez az érvelés rendkívül félrevezető és félreérthető, különösen, ha a relativitás elméletére és a fény sebességére mint elvi határra is hivatkoznak benne. Egyrészt egy hiperbolikus elmélet ugyan véges jelterjedési sebességet jelent, de az akármekkora lehet, sokkal nagyobb is, mint a fénysebesség. Hiperbolikus kontinuumelméletekben a jelterjedési sebességek az anyagjellemző paraméterektől függenek. Másrészt parabolikus elméletek könnyedén megfogalmazhatóak relativisztikusan, és az ilyen elméletek figyelembe veszik a fény véges terjedési sebességét [162]. Harmadrészt és legfőképpen pedig ezek az elméletek jól meghatározható érvényességgel rendelkeznek, például a hőmérséklet nem változhat nagyon a közepes szabad úthossznál kisebb távolságokon. Ez pedig azt jelenti, hogy túl éles kezdeti feltételek esetén valójában nem jelennek meg a tipikus végtelen sebességű megoldások, az elmélet érvényessége meghatározza a terjedési sebességüket. Például ez a sebesség víz esetén kb. 14 m/s. Ugyanez igaz jelek megfigyelhetőségére is: a Fourier-egyenlet exponenciális megoldásainak megfigyelhetőségi, mérhetőségi határa adott sebességgel terjed (függetlenül a műszerek konkrét érzékenységtől), ez pedig megint csak anyagfüggő, és hétköznapi anyagokra messze van a fénysebességtől. Ez igaz mind relativisztikusan, mind nemrelativisztikusan [79, 162, 314]. Vagyis mindkét esetben a parabolikus egyenletek érvényes, és gyakorlati jelentőségük mellett elvileg sem elvethető elméleteket adnak.

Gyakorlati oldalról azt fontos megemlíteni, hogy a mikro- és nanotechnológia fejlődése szükségessé teszi a hővezetési jelenségek kis méretekben történő vizsgálatát, ezért a hővezetés elmélete intenzív kutatás tárgya [30, 339]. Több kísérlet régóta eltéréseket mutat a Fourier-egyenlettől [157, 83] és számos elméleti fejlemény igyekszik ezeknek az eltéréseknek a természetét megragadni a kontinuumelmélet segítségével is [43, 44, 41, 296, 101, 14, 15].

Ezeknek a kutatásoknak a kiindulópontja minden esetben a belső energia mérlege:

$$\rho \dot{e} + \partial_i q^i = 0, \quad (2.144)$$

ahol ρ a sűrűség, e a fajlagos belső energia, és q^i a belső energia áramsűrűségének konduktív része, a hőáram. A pont a szubsztanciális időderiváltat jelöli. Eddig következetesen jelöltük alsó és felső indexekkel a ko- és kontravariáns vektorokat és az azonos indexek összegzése is csak ilyen indexpárookra volt megengedett. Azonban a Fourier-törvény maga eleve szükségessé teszi egy alapvetően kovariáns térbeli derivált

⁰ Ez a fejezet a [313] munkán alapul.

egyenlővé tételét egy kontravariáns hőáramsűrűség vektorral. Az azonosítást természetesen a közöttük levő arányossági tényező, a hővezetési együttható tenzor végzi el. Mivel számos további anyagi együttható kerül ebben a fejezetben bevezetésre, ezért a továbbiakban pongyola, de az olvasását megkönnyítő módon egyöntetűen felső indexszel fogjuk jelölni a vektorokat és a kovektorokat.

A Fourier-egyenlet fenomenologikus általánosításaiban a (2.145) konstitutív egyenlet módosítódik további tagokkal. A legfontosabb módosítási javaslatok a következők:

$$q^i = -\lambda \partial^i T, \quad (2.145)$$

$$\tau \dot{q}^i + q^i = -\lambda \partial^i T, \quad (2.146)$$

$$\tau \dot{q}^i + q^i = -\lambda \partial^i T + a_1 \partial^{ij} q^j + a_2 \partial^{jj} q^i, \quad (2.147)$$

$$\tau \dot{q}^i + q^i = -\lambda \partial^i T + b_2 \partial^i \dot{T}, \quad (2.148)$$

$$\tau \dot{q}^i = -\lambda \partial^i T + a_2 \partial^{jj} q^i. \quad (2.149)$$

Itt (2.145) a klasszikus Fourier törvény [80], (2.146) a Maxwell–Cattaneo–Vernotte-egyenlet (MCV) [221, 37, 328], (2.147) a Guyer–Krumhansl-egyenlet (GK) [110], (2.148) a Jeffreys-típusú vagy késleltetési (lagging) hővezetési egyenlet néven ismert [151], és (2.149) a hővezetés Green–Naghdi-egyenletére vezet (GN) [100]. A hővezetési tényező λ , a relaxációs idő τ , a_1 , a_2 és b_2 pedig további anyagi paraméterek.

Ezeknek az egyenleteknek az eredete, levezetése és motivációja nagyon sokféle. A kinetikus elmélet többféle módon származtatja a Fourier- és az MCV-egyenletet. Például a Boltzmann-egyenlet momentum sorfejtése a Fourier-törvényt adja első rendben, másodrendben pedig az MCV-egyenletet [154, 234]. A GK-egyenletet először a Boltzmann-egyenletből a fonon-rács kölcsönhatásra vonatkozó speciális ütközési integrálokkal vezették le [110, 111].

A fenti egyenleteket származtató fenomenologikusabb elméletek is nagyon sokfélék [151, 152, 41]. A Fourier-törvény a nemnegatív entrópiaprodukció következménye a klasszikus irreverzibilis termodinamikában [104], az MCV-egyenlet megkapható hasonló módon, ha a lokális egyensúlytól való eltérést egy belső változóval jellemezzük [73]. A hőáramsűrűség konduktív része pedig egy, a kinetikus elmélet által jól meg-alapozott jelölt erre a belső változóra [115, 154, 234].

A gyengén nemlokális kiterjesztések eredete a fenomenologikus elméletekben is kérdéses. Az elméletek egy része a Guyer–Krumhansl-egyenletet az entrópia áramsűrűségnek a klasszikus formától való eltéréseivel hozza kapcsolatba [297, 45, 40]. A (2.148) késleltetési (lagging) hővezetési egyenletet reológiai analógia alapján javasolták [151], de az eredeti megfontolásokban még a termodinamikával való viszonya sem világos [41]. GK-egyenletet vezethetünk le különféle egyszerű mechanizmusokkal is, mint például hőáramhasítás (heat flow splitting) [284], vagy kétlépéses relaxáció [3, 84]. A Jeffreys-típusú hővezetés mentes az MCV-egyenlet számos problémájától (a nemlokális tag miatt) [29]. Green és Naghdi elméletének sajátos a státusa, ugyanis ez egy speciális skaláris belső változón alapul, amelynek az időderiváltja a hőmérséklet, és az elmélet alkotói igen szokatlan módon vizsgálták a lokális egyensúlytól való eltérés termodinamikai következményeit [100]. Egy olyan hővezetési elméletet kaptak, amely nemtriviális módon tartalmazza a megszokott Fourier-törvényt, és amelynek van nulla entrópiaprodukciót eredményező alosete, azaz hővezetést jósol nulla disszipációval.

A fenti rövid áttekintésből is látható, hogy a Fourier-törvény gyengén nemlokális általánosításainak nagyon sokféle motivációja és levezetése létezik. Legtöbbjüket akkor tekintjük fizikai jelenségek érvényes modelljének, ha a mikroszkopikus levezetésük tiszta képet ad a módosítás hátteréről. Néhány fontos esetben, mint például a Jeffreys-típusú hővezetési egyenlet esetén, a második főtétel szerepe nem világos. Az összes termodinamikailag következetes levezetés bevezeti valahogy a lokális egyensúlytól való eltérést. A nemlokális kiterjesztések megengedik az entrópiaáram klasszikus formájától való eltérést.

A továbbiakban az előzőekben felsorolt konstitutív egyenleteket vezetjük le az irreverzibilis termodinamika segítségével. Két egyszerű és általános feltevésre van ehhez szükségünk:

- a lokális egyensúlytól való eltérés jellemzésére, ezt egy vektori belső változó segítségével tesszük meg [325, 219, 220],
- az entrópiaáram klasszikus formájától történő eltérést pedig egy áramszorzónak elnevezett, a belső változókhoz hasonló mennyiséggel fogjuk jellemezni [249, 297].

Az alább tárgyalt lineáris közelítésben mind az áramszorzó, mind a belső változó kiküszöbölhető, és egy általános konstitutív differenciálegyenletet vezethetünk le, melynek (2.145)–(2.149) mind bizonyos speciális esetei lesznek. Látni fogjuk, hogy a termodinamika II. főtételéből eredő megszorítások egyáltalán nem nyilvánvalóak, és csökkentik a látszólag megjelenő független együtthatók számát, annak ellenére, hogy reciprocitási relációkat nem tételezünk fel.

A csak általános feltevéseken alapuló termodinamikai tárgyalásnak fontos jellemzője, hogy mindaddig, amíg a lokális egyensúlytól való eltérés jellemzésére vonatkozó általános feltételeket egy mikro- vagy mezoszkopikus mechanizmus teljesíti, a következmények ugyanazok lesznek: ezt tekinthetjük a nemegyensúlyi termodinamikai tárgyalás univerzalitásának. Ezt a fontos tulajdonságot két példán mutatjuk be, melyek általános eredményünk speciális esetének bizonyulnak: egyrészt, ha a Fourier-törvénytől való eltérést egy skalármező gradiensevel jellemezzük, akkor a modell egyenletei az úgynevezett parabolikus kétlépéses modellre redukálódnak. Illetve, ha a Fourier-törvénytől való eltérést egy általános vektormezővel jellemezzük, akkor megmutatjuk, hogy ennek a vektormezőnek egy MCV-egyenletet kell kielégítenie.

2.9.2. Az entrópiaprodukción

A lokális egyensúlytól való eltérés jellemzésére egy, a továbbiakban ξ^i -vel jelölt vektortváltozót vezetünk be. Vizsgáljunk izotrop anyagokat. Két konstitutív hipotézist vezetünk be:

1. Feltételezzük, hogy a nemegyensúlyi entrópia kvadratikusan függ a ξ^i belső változótól:

$$s(e, \xi) = \hat{s}(e) - \frac{m}{2} \xi^2. \quad (2.150)$$

Itt az m skalár anyagi együtthatót néha termodinamikai induktivitásnak nevezik [115]. A fenti forma állapotfüggő $m = m(e, \xi^i)$ induktivitással a Lagrange-közéértéktétellel és az entrópia konkávitásának a nemegyensúlyi állapottéren

történő megkövetelésével indokolható. Ha ξ^i fizikai értelmezéséről semmiféle konkrét információnk nincs, akkor a Morse-lemma értelmében a változót átskálázva $m = 1$ általánosan elérhető [325]. Az entrópia konkávitása miatt $m \geq 0$. Ha m állandó, akkor a következő parciális deriváltakat kapjuk:

$$\left. \frac{\partial s}{\partial e} \right|_{\xi^i} = \frac{1}{T}, \quad \left. \frac{\partial s}{\partial \xi^i} \right|_e = -m\xi^i. \quad (2.151)$$

Itt T a hőmérséklet. A termodinamikai viszonyokat most is kényelmes a Gibbs-reláció segítségével kifejezni:

$$de = Tds + m\xi^i T d\xi^i. \quad (2.152)$$

2. A második feltevésünk az entrópiaáram-sűrűségét általánosítja. Megköveteljük, hogy energiaáram nélkül ne legyen entrópiaáram sem egy tisztán hővezető rendszerben. Ezért az entrópiaáram-sűrűség, amennyiben kétszer folytonosan differenciálható függvénye a hőáramnak, akkor a Lagrange-féle középértéktétel értelmében a következő formába írható:

$$J^i = B^{ij} q^j, \quad (2.153)$$

ahol a B^{ij} konstitutív függvényt áramszorzónak nevezzük. Ezt a feltevést először Nyíri vezette be [249], hővezetésre történő alkalmazása a GK-egyenletre vezet [297].

A fenti feltételekkel kapjuk az entrópiaprodukciót:

$$\begin{aligned} \rho \dot{s} + \partial^i J^i &= -\frac{1}{T} \partial^i q^i - \rho m \xi^i \dot{\xi}^i + \partial^i (B^{ij} q^j) = \\ &= \partial^i q^j \left(B^{ij} - \frac{1}{T} \delta^{ij} \right) + (\partial^j B^{ij}) q^i - \rho m \xi^i \dot{\xi}^i \geq 0. \end{aligned} \quad (2.154)$$

2.9.3. Lineáris vezetési törvények

Itt, az első tagban a konstitutív függvény a B^{ij} áramszorzó, a második tagban a konstitutív függvény q^i , a harmadik tagban pedig a belső változó időderiváltja, azaz a fejlődési egyenlete. Így izotrop kontinuumokban a legáltalánosabb lineáris kapcsolat a megfelelő termodinamikai erők és áramok között hét anyagi paramétert vezet be:

$$q^i = l_1 \partial^j B^{ij} - l_{12} \xi^i, \quad (2.155)$$

$$m \rho \dot{\xi}^i = l_{21} \partial^j B^{ij} - l_2 \xi^i, \quad (2.156)$$

$$B^{ij} - \frac{1}{T} \delta^{ij} = k_1 \partial^i q^j + k_2 \partial^j q^i + k_3 \partial^k q^k \delta^{ij}. \quad (2.157)$$

Itt $l_1, l_{12}, l_{21}, l_2, k_1, k_2, k_3$ skalár állandó vezetési együtthatók, és δ^{ij} az egységtenzort jelölő Kronecker-delta. Az entrópiaprodukció nemnegativitása a következő egyenlőtlenségeket adja az anyagi paraméterekre:

$$\begin{aligned} l_1 \geq 0, \quad l_2 \geq 0, \quad k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0, \quad k_3 \geq 0, \\ L = l_1 l_2 - \frac{1}{4} (l_{12} + l_{21})^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.158)$$

2. Kontinuum-termodinamika

Fontos, hogy a duális belső változókhoz hasonlóan itt sem tételezünk fel reciprocitási relációkat az utolsó két tagban szereplő vektori termodinamikai kölcsönhatások között [311, 19].

Az áramszorzó kiküszöbölhető (2.155)–(2.156)-ból (2.157) segítségével. Továbbá a belső változót is kiküszöbölhetjük (2.155)-ből és (2.156)-ból is. Ha $l_2 \neq 0$ és $m, l_1, l_{12}, k_1, k_2, k_3$ állandók, akkor a következő differenciálegyenlet rögzíti a konstitutív viszonyokat a hőmérséklet és az energiaáram-sűrűség között.

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} q^i + q^i = \\ = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T} + \lambda_2 \frac{d}{dt} \left(\partial^i \frac{1}{T} \right) + a_1 \partial^{ij} q^j + a_2 \partial^{jj} q^i + b_1 \frac{d}{dt} (\partial^{ij} q^j) + b_2 \frac{d}{dt} (\partial^{jj} q^i). \end{aligned} \quad (2.159)$$

Ebben az egyenletben a szubsztanciális időderiváltat d/dt -vel jelöltük és bevezettük a

$$\begin{aligned} \tau = \frac{m\rho}{l_2}, \quad \lambda_1 = l_1 - \frac{l_{12}l_{21}}{l_2}, \quad \lambda_2 = m\rho \frac{l_1}{l_2}, \\ a_1 = \lambda_1(k_1 + k_3), \quad a_2 = \lambda_1 k_2, \\ b_1 = \lambda_2(k_1 + k_3), \quad b_2 = \lambda_2 k_2 \end{aligned} \quad (2.160)$$

jelöléseket. Látható, hogy (2.159) csak 5 független anyagi paramétert tartalmaz. k_1 és k_3 , illetve l_{12} és l_{21} nem jelenik meg külön. (2.160) egyik együtthatója sem negatív (2.158) egyenlőtlenségei miatt. A hővezetési tényezőt érdemes külön is szemügyre venni, mert

$$l_1 l_2 - l_{12} l_{21} = l_1 l_2 - l_s^2 + l_a^2 \geq 0, \quad (2.161)$$

ahol $l_s = (l_{12} + l_{21})/2$ és $l_a = (l_{12} - l_{21})/2$ a szimmetrikus és antiszimmetrikus részei (2.155)–(2.156) egyenletek vezetési mátrixának. Ennek következményeképpen ha $\lambda_1 = 0$, akkor ebből következik, hogy $\lambda_2 = 0$.

2.9.4. Speciális esetek

A vezetési együtthatók értéke szerint speciális esetekként visszkapjuk a bevezetésben említett (2.145)–(2.149) egyenleteket:

1. *Fourier*. Ha $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ és $l_{12} = 0$, akkor a (2.155)–(2.157) egyenletekből közvetlenül megkapjuk a Fourier-törvényt a következő formában:

$$q^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T} = -\lambda \partial^i T, \quad (2.162)$$

ahol $\lambda = \lambda_1/T^2 = l_1/T^2$ a Fourier-féle hővezetési együttható. Ez a fajta kiküszöbölés nem látszik (2.159)-ből, mert (2.160) és (2.158) miatt $\tau = 0$, $\lambda_2 = 0$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 0$ nem lehetséges.

2. *Maxwell–Cattaneo–Vernotte*. Gyakran megemlítik, hogy a kiterjesztett irreverzibilis termodinamikát [154] tulajdonképpen a hőáram-sűrűségnek, mint speciális vektori belső változónak a választásával kapjuk. $\xi^i = q^i$ [219, 255]. Azonban

esetünkben a kiterjesztett termodinamika fejlődési egyenletei a fenti általános egyenlet a eseteként adódnak, valóban, (2.159) mutatja, hogy $\lambda_2 = 0$, $a_1 = a_2 = 0$ és $b_1 = b_2 = 0$ a (2.146) egyenlethez vezet. Tehát $l_1 = 0$, ezért valóban, a belső változó arányos a hőáramsűrűséggel (2.155) szerint. Ezenkívül $\lambda_1 = l_a^2/l_2$ pozitív, (2.158) utolsó egyenlőtlensége alapján. Az MCV-egyenletet akkor kapjuk, ha a hővezetést egy Casimir típusú keresztteffektus dominálja.

3. *Jeffreys-típusú*. Ha $a_1 = a_2 = 0$ és $b_1 = b_2 = 0$, akkor a Jeffreys-típusú egyenlet termodinamikai változatát kapjuk a következő formában:

$$\tau \frac{d}{dt} q^i + q^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T} + \lambda_2 \frac{d}{dt} \left(\partial^i \frac{1}{T} \right). \quad (2.163)$$

$l_1 \neq 0$ -ból $\lambda_2 \neq 0$ következik, és az MCV-egyenlet kiegészült egy Jeffreys-típusú egyenletté. Az egyenlet alapvetően nemlineáris természete nem küszöbölhető ki hőmérsékletfüggő együtthatók feltételezésével, mint azt a Fourier-törvény esetén megszokhattuk.

4. *Guyer–Krumhansl*. Ha $\lambda_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 0$ és $\lambda_1 = \lambda T^2$, akkor kapjuk a GK-egyenletet (2.147). A GK-egyenlet is Casimir-csatolást igényel (2.155)–(2.156)-ban.
5. *Általános Green–Naghdi-típus*. Egy GN-típusú egyenletet kapunk, ha $l_2 = 0$. Ebben az esetben a Casimir-típusú reciprocitás (2.158) utolsó egyenlőtlenségének következménye, és azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \hat{\tau} \frac{d}{dt} q^i &= \hat{\lambda}_1 \partial^i \frac{1}{T} + \hat{\lambda}_2 \frac{d}{dt} \left(\partial^i \frac{1}{T} \right) + \\ &+ \hat{a}_1 \partial^{ij} q^j + \hat{a}_2 \partial^{jj} q^i + \hat{b}_1 \frac{d}{dt} (\partial^{ij} q^j) + \hat{b}_2 \frac{d}{dt} (\partial^{jj} q^i). \end{aligned} \quad (2.164)$$

Itt a jelölések hasonlóak (2.159) jelöléseihez, de másfajta kombinációi a termodinamikai paramétereknek, mint (2.160)-ban.

6. *Green–Naghdi-típus*. Az egyszerű GN-típusú egyenlet az $l_2 = 0$, $l_1 = 0$ és Casimir-típusú reciprocitás $l = l_{12} = -l_{21}$ feltételezésével adódik. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\hat{\tau} \frac{d}{dt} q^i = \hat{\lambda}_1 \partial^i \frac{1}{T} + \hat{a}_1 \partial^{ij} q^j + \hat{a}_2 \partial^{jj} q^i. \quad (2.165)$$

A GN-típusú egyenlet lehet nemdisszipatív (nulla entrópiaprodukcióval), ha az entrópia áramsűrűség klasszikus, azaz $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Megjegyezzük, hogy a λ_1 hővezetési együttható a II. főtétele miatt sosem lesz negatív.

2.9.5. Makroszkopikus univerzalitás

A (2.159) általános hővezetési egyenletre különböző fizikai mechanizmusok vezethetnek. Ebben a részben arra mutatunk két példát, hogy milyen speciális mechanizmusok eredményezhetnek eltérést az entrópiaáram klasszikus formájától. Csak a GK-egyenlet egy leegyszerűsített formáját vizsgáljuk, amikor a $\lambda_2 = 0$ és $b_1 = b_2 = 0$

2. Kontinuum-termodinamika

feltételeken felül még $k_1 = k_2 = 0$ is fennáll. Ebben az esetben (2.159) a következő egyenletre egyszerűsödik:

$$\tau \dot{q}^i + q^i = \lambda_1 \partial^i B, \quad (2.166)$$

ahol $B = B^{ii}/3 = 1/T + k_3 \partial^k q^k$, $\tau = m\rho/l_2$ és $\lambda_1 = l_a^2/l_2$.

Hőáramok

Első példánkban tegyük fel, hogy a Fourier-egyenletől való eltérést a \hat{q}^i vektormezővel jellemezzük a következő módon:

$$\hat{q}^i := q^i + \lambda_S \partial^i T, \quad (2.167)$$

ahol λ_S állandó. Behelyettesítve q^i -t az egyszerűsített (2.167) GK-egyenletbe, a következő feltételt kapjuk az ismeretlen vektormezőre:

$$\tau \dot{\hat{q}}^i + \hat{q}^i = (\lambda_1 - \lambda_S T^2) \partial^i \frac{1}{T} + (\tau \lambda_S - \lambda_1 k_3 \rho c) \partial^i \dot{T}. \quad (2.168)$$

Itt alkalmaztuk a (2.144) egyenletet, és az $e = cT$ állapotegyenletet állandó c fajhővel. Ezért a $k_3 = \tau \lambda_S / (\lambda_1 \rho c)$ feltétellel a \hat{q}^i vektormező kielégít egy MCV-egyenletet a $\lambda = \lambda_S - \lambda_1/T^2$ Fourier-féle hővezetési együtthatóval. Vagyis értelmezhetjük a tárgyalt esetet úgy, hogy a q^i teljes hőáramsűrűséget két részre bontottuk: $q^i - \hat{q}^i$ egy Fourier-törvénynek, és \hat{q}^i pedig egy MCV-egyenletnek tesz eleget, azaz a hővezetés két csatornán zajlik [284].

Két hőmérséklet

Egy másfajta jellemzését adhatjuk a Fourier-törvénytől való eltérésnek egy T_2 skalármezővel:

$$\beta \partial^i T_2 := q^i + \lambda_T \partial^i T, \quad (2.169)$$

ahol λ_T és β állandó együtthatók. Behelyettesítve q^i -t az egyszerűsített (2.166) egyenletbe a következő feltétel adódik:

$$\partial^i \left[\beta (\tau \dot{T}_2 + T_2 - T) \right] = \left[\lambda_1 + (\lambda_T - \beta) T^2 \right] \partial^i \frac{1}{T} + (\tau \lambda_T - \lambda_1 k_3 \rho c) \partial^i \dot{T}. \quad (2.170)$$

Ezért $k_3 = \tau \lambda_T / (\lambda_1 \rho c)$, $\lambda_1 = (\beta - \lambda_T) T^2$ választással a T_2 skalármezőnek ki kell elégítenie egy hővezetési egyenletet. Látszólag kéthőmérsékletű rendszerrel van dolgunk, amelyek között hőtranszport jön létre. Ez jól ismert mechanizmusa a hővezetésnek olyan anyagokban, ahol az egyik komponens termikusan gerjeszthető, függetlenül a másiktól, például fémekben, ahol az elektronhőmérséklet eltérhet a rácshőmérséklettől [3, 84].

A fenti két példa mutatja, hogy a tisztán makroszkopikus alapelvekre épülő megfontolások esetén számíthatunk egyfajta univerzalitásra: a konkrét mechanizmustól függetlenül a hővezetési egyenlet végső soron ugyanaz lesz.

2.9.6. Megoldások

Ebben a szakaszban a fenti egyenletek egyetlen helykoordinátától függő, egyszerű formáját fogjuk megoldani. Merev hővezetőkben a szubsztanciális időderivált megegyezik a ∂_t parciális időderiválttal a vezetőhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben, és felcserélhető a ∂_x térbeli deriválttal. Állandó fajhő esetén ($e = cT$) kiküszöbölhetjük a hőáramot a (2.159) egyenletből, és azt kapjuk, hogy

$$\tau \partial_{tt} T + \partial_t T = -\lambda_1 \partial_{xx} \frac{1}{T} - \lambda_2 \partial_{xxt} \frac{1}{T} + \lambda_1 k \partial_{xxt} T + \lambda_2 k \partial_{xxtt} T, \quad (2.171)$$

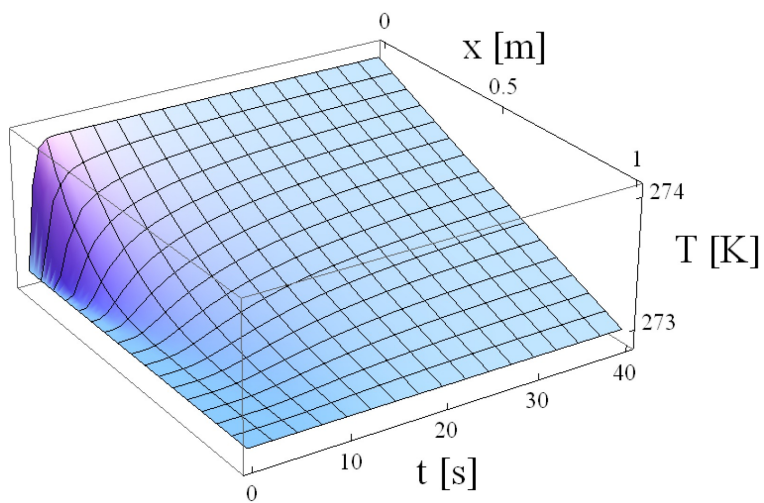
ahol $k = k_1 + k_2 + k_3$. Látható, hogy a reciprok hőmérséklet miatt az egyenlet nemlineáris és a Jeffreys-típusú és a GK-típusú egyenletek nem egyeznek meg. Ebben az egyenletben a fenti (2.155)–(2.157) konstitutív egyenlet együtthatóit tekintettük állandónak, ahogy az természetes is egy termodinamikai elméletben. Megfigyelhetjük, hogy ebben az esetben a Fourier-féle hővezetési együttható hőmérsékletfüggő: $\lambda_F = \rho c \lambda_1 / T^2 \neq \text{áll.}$

A következőkben a (2.171) egyenlet néhány jellegzetes megoldását mutatjuk be ugrásos peremfeltétel mellett. Tegyük fel, hogy egy L hosszúságú rúd kezdetben $T(0, x) = T_i$ hőmérsékletű, és $\partial_t T(0, x) = 0$. A rúd távolabbi végét a kezdeti hőmérsékleten tartjuk, tehát $T(t, L) = T_i$. A rúdnak a koordinátarendszer origójában levő vége a kezdeti hőmérsékletről rövid időn belül exponenciálisan egy magasabb T_f hőmérsékletre változik a következő függvény szerint $T(t, 0) = T_i + (T_f - T_i)(1 - e^{-t/t_u})^2$, ahol t_u állandó, a változás karakterisztikus ideje.

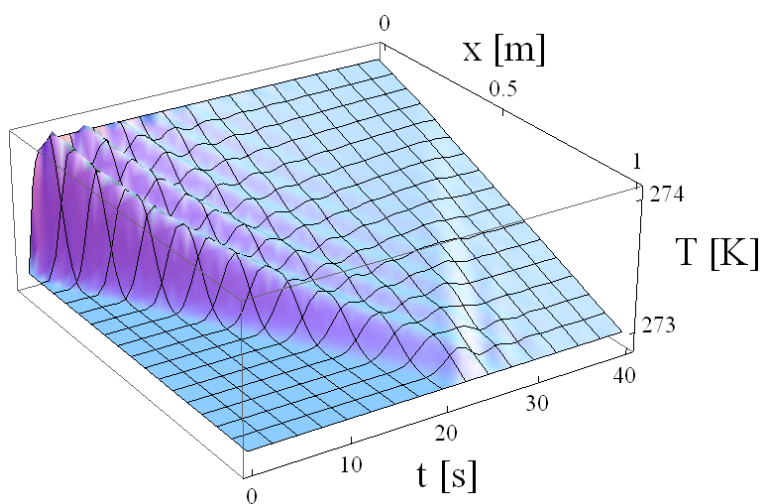
A rúd hossza legyen egy méter, ($L = 1m$) a kezdeti és peremfeltételek paramétere pedig $T_i = 273K$, $T_f = 274K$, $t_u = 2s$. A 2.1. ábra mutatja Fourier-egyenlet megoldását, ahol az anyagi együtthatók $\lambda_1 = 0.01T_i^2 m^2/s$ és az egyéb paraméterek, azaz λ_2, k és τ nullák. A Fourier-együtthatóval való könnyebb összevethetőség miatt adtam meg a kezdeti hőmérséklet függvényében a hővezetési együtthatót. A vizsgált időtartam alatt beáll a $T(x) = T_i + T_f x/L$ lineáris stacionárius megoldás.

A 2.2. ábrán a Maxwell–Cattaneo–Vernotte-egyenlet megoldása látható, ahol $\tau = 5s$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 m^2/s$ és λ_2, k nullák. Megfigyelhetjük a véges terjedési sebességet, a fodorok csillapodását és a visszavert jelet/impulzust. A 2.3. és a 2.4. ábrák olyan megoldást mutatnak, ahol τ és λ_1 ugyanazok, mint a 2.2 ábra megoldása esetén voltak, de $\lambda_2 = 0.001T_i^2 m^2$ a Jeffreys-típusú és $k = 0.1T_i^{-2}s$ a Guyer–Krumhansl-egyenlet esetén. Mindkét esetben a stacionárius megoldáshoz tartás gyorsabb, mint a 2.2. ábrán volt. A 2.5. ábrán egy olyan megoldás látható, ahol a (2.171) egyenletben szereplő egyik együttható sem nulla. Itt a paraméterek $\tau = 5s$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 m^2/s$, $\lambda_2 = 0.01T_i^2 m^2$, $k = 0.1T_i^{-2}s$. Ebben az esetben az egyenlet megoldása szinte megkülönböztethetetlen a Fourier-esettől.

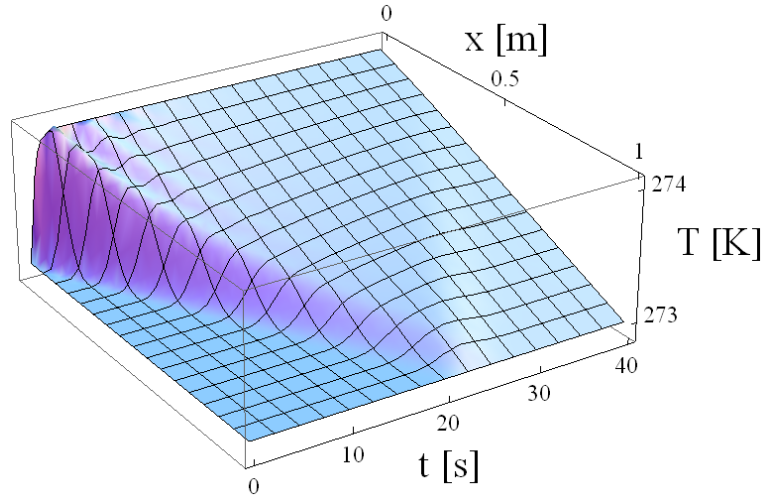
A nem disszipatív GN-típusú egyenlet megoldását a 2.6. ábrán mutatjuk, ugyanazokkal az együtthatókkal, mint az MCV-egyenletet $\tau = 5s$ $\lambda_1 = 0.01T_i^2 m^2/s$. A 2.7. és 2.8. ábrákon látható, hogy a Jeffreys-, vagy a Guyer–Krumhansl-disszipáció nem csillapítja a visszavert hullámot. Ekkor a paraméterek $\tau = 5s$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 m^2/s$, és $\lambda_2 = 0.001T_i^2 m^2$ a 2.7., és $k = 0.1T_i^{-2}s$ a 2.8. ábra esetén. Végül a 2.9. ábra azt mutatja, hogy a további csillapítási tagok hatása más, az általános GN-egyenletre, vagy a GK–Jeffreys-típusú egyenletekre. A $\tau = 5s$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 m^2/s$, $\lambda_2 = 0.01T_i^2 m^2$, $k = 0.1T_i^{-2}s$ értékekkel a csillapítás kvalitatívan különböző, ezt hosszabb időintervallumon mutatom.



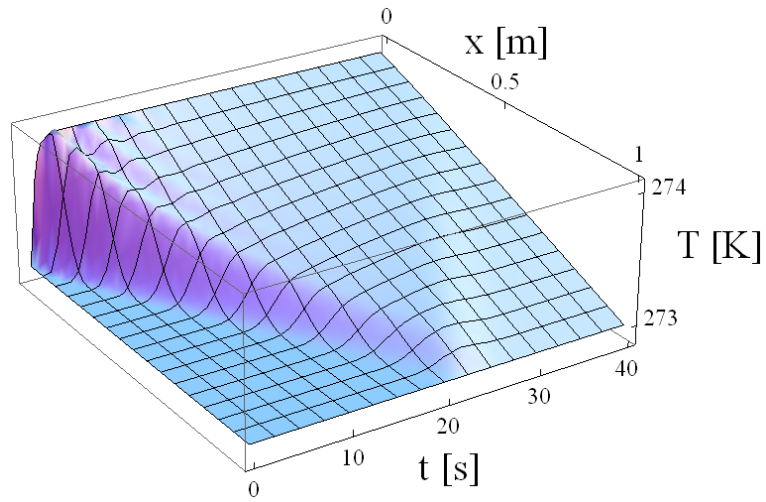
2.1. ábra. Fourier-egyenlet, $\tau = 0s$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2/s$.



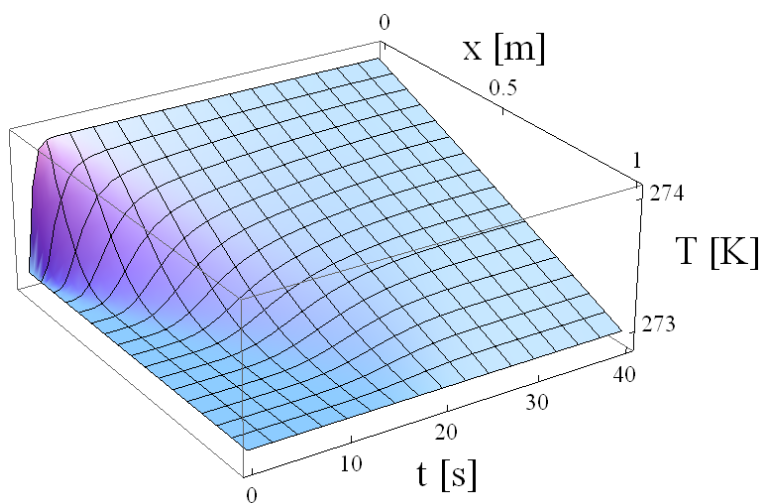
2.2. ábra. MCV-egyenlet, $\tau = 5s$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2/s$.



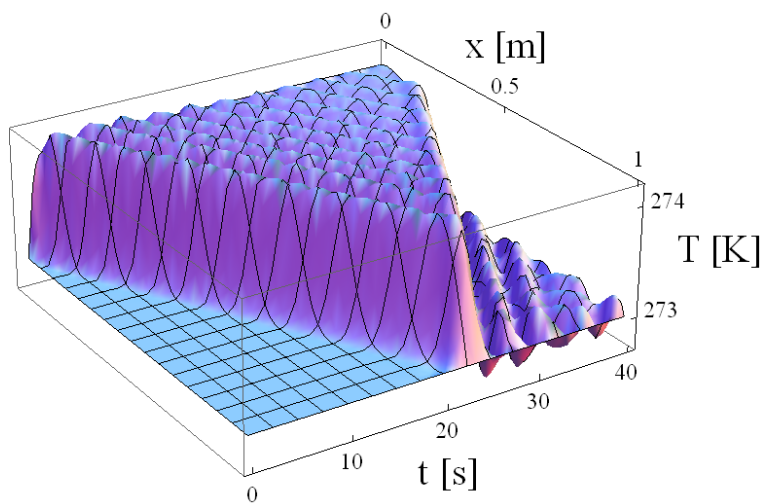
2.3. ábra. Jeffreys-típusú egyenlet, $\tau = 5s$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2/s$, $\lambda_2 = 0.001T_i^2 \text{ m}^2$.



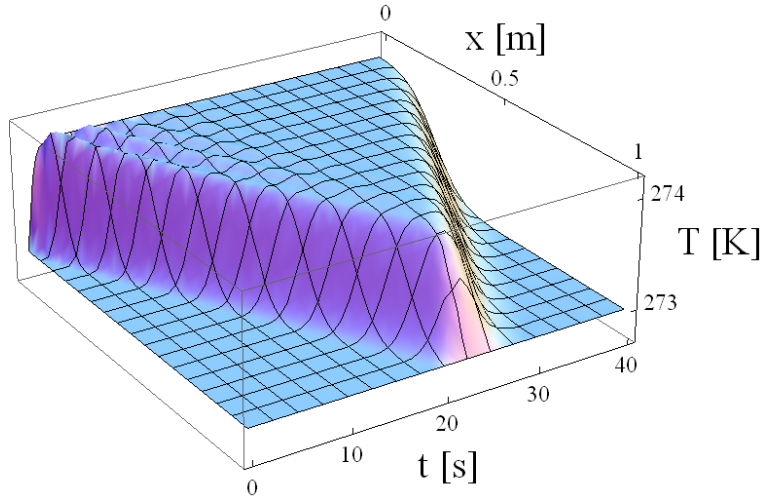
2.4. ábra. Guyer-Krumhansl-egyenlet, $\tau = 5s$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2/s$, $k = 0.1T_i^{-2}s$.



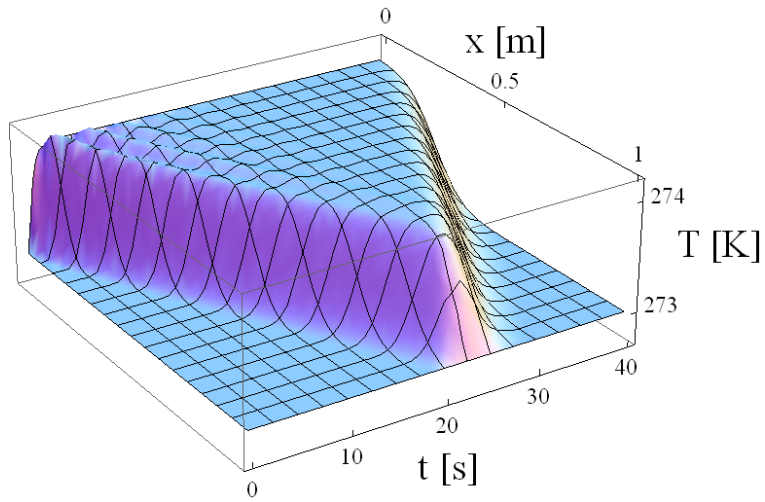
2.5. ábra. Jeffreys–Guyer–Krumhansl-egyenlet, $\tau = 5\text{s}$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2/\text{s}$, $\lambda_2 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2$, $k = 0.1T_i^{-2}\text{s}$.



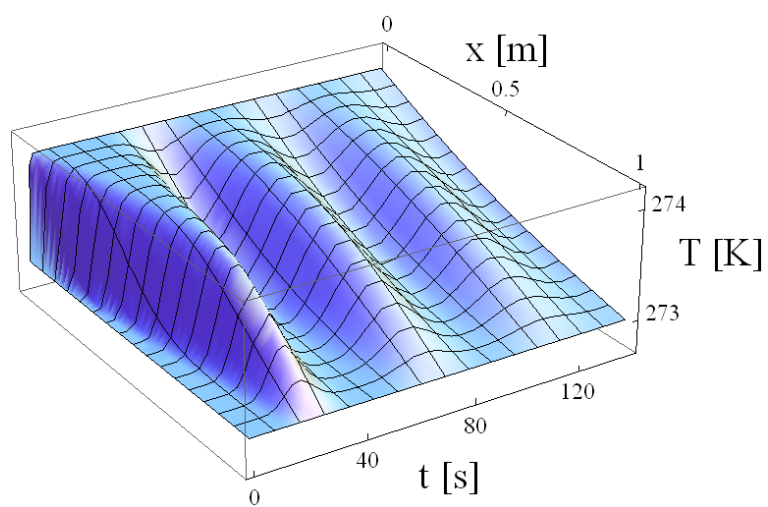
2.6. ábra. Nemdisszipatív Green–Naghdi-típusú egyenlet $\tau = 5\text{s}$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2/\text{s}$.



2.7. ábra. Green–Naghdi-típusú egyenlet Jeffreys-csillapítással $\tau = 5\text{s}$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2/\text{s}$, $\lambda_2 = 0.001T_i^2 \text{ m}^2$.



2.8. ábra. Green–Naghdi-típusú egyenlet Guyer–Krumhansl-csillapítással $\tau = 5\text{s}$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2/\text{s}$, $k = 0.1T_i^{-2}\text{s}$.



2.9. ábra. Green–Naghdi-típusú egyenlet Jeffreys- és GK-csillapítással $\tau = 5\text{s}$, $\lambda_1 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2/\text{s}$, $\lambda_2 = 0.01T_i^2 \text{ m}^2$, $k = 0.1T_i^{-2}\text{s}$.

2.10. Rugalmasság és reológia

⁰A szilárd testek mechanikája már valódi kihívást jelent az objektivitás irányából. Elsődlegesen a véges deformációs elmélet kinematikája az, ahol a Noll-féle definíció elégtelennek tűnik. Ezzel a kérdéssel kiterjedten foglalkoztunk az utóbbi években (lásd a [5, 11] kötetekben található tanulmányokat), legutóbbi eredményünk szerint az egész kérdést fogalmilag újra kell alapozni, ugyanis a referencia-konfiguráció, mint az anyagi sokaság reprezentánsa, illetve az anyagi sokaság, a véges deformációs kinematika alapköve fizikailag helytelen és ráadásul felesleges objektum, mert az objektív tárgyalás az anyagi sokaságra történő visszahúzás nélkül, téridőn megtehető [89, 90]. Ennek a kinematikai eredménynek termodinamikai elméletbe történő beültetése és kísérleti alátámasztása még folyamatban van. Az alábbiakban csak kis deformációs rugalmasságtannal és reológiával foglalkozom. A reológiai hatások modellezésére egy másodrendű tenzor dinamikai változót vezetek be.

Ebben a fejezetben csak elsőrendűen gyengén nemlokális konstitutív állapotteret vezetünk be, ezért a 2.4 és 2.6 fejezetek alapján elegendő a klasszikus irreverzibilis termodinamika módszereit alkalmazni. A Liu-eljárás segítségével igazolhatnánk, hogy az entrópiaáram-sűrűség a klasszikus (2.180) formájú, de ez a módszer egyéb tekintetben ugyanerre az eredményre vezetne, csak bonyolultabb módon.

A kinematikai alapváltozót, az ϵ^{ij} kis deformációt, például a H^{ij} mozgásgradiens (hagyományosan deformációgradiens, lásd A függelék) szimmetrikus részéből kaphatjuk

$$\epsilon^{ij} = \frac{1}{2}(H^{ij} + H^{ji}) - \delta^{ij}. \quad (2.172)$$

A mozgásgradiens vegyes tenzor, ráadásul egyik indexe a referenciakonfiguráción (anyagi sokaságon) végzett deriválásból származik, mint ahogy az A függelékben ellenőrizhető. Azaz a fenti kifejezés csak a térbeli vektorok és kovektorok megfelelő azonosításával lehet érvényes. Ennek jelölése ebben a fejezetben is az előző fejezethez hasonlóan rontaná az olvashatóságot, ezért itt is eltérünk a következetes téridő-jelölésektől. A kis deformáció a mozgásgradienshez hasonló fizikai mennyiség, anyagi deriváltja a szubsztanciális derivált, ahogy azt az A függelékben részletesen megmutattuk (A.66). (A.21) linearizálásával kapjuk a kis deformáció és a sebességmező közötti összefüggést:

$$\dot{\epsilon}^{ij} = \frac{1}{2}(\partial^i v^j + \partial^j v^i). \quad (2.173)$$

Az (2.66), (2.67) és (2.96) tömeg-, lendület- és belsőenergia-mérlegek változatlanok, de érdemes egyöntetűen szubsztanciális deriváltakkal felírni őket,

$$\dot{\rho} + \rho \partial^i v^i = 0, \quad (2.174)$$

$$\rho \dot{v}^i + \partial^j P^{ij} = 0^i, \quad (2.175)$$

$$\rho \dot{e} + \partial^i q^i = -P^{ij} \dot{\epsilon}^{ij}. \quad (2.176)$$

Ezek után az entrópiaprodukciónak kiszámításához feltételezzük, hogy a fajlagos entrópia a deformáció függvénye, de ezen kívül bevezetünk egy tenzori dinamikai szabadsági

⁰ Ez a fejezet a [309, 303] munkákon alapul.

2. Kontinuum-termodinamika

fokot is, amelyet ξ^{ij} -vel jelölünk (ennek pontos tenzori karaktere nem rögzített). Feltételezzük továbbá, hogy a fajlagos entrópia ezeknek a változóknak a függvénye, és ξ^{ij} -ben kvadratikus:

$$s(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}, \xi^{ij}) = s_e(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}) - \frac{\xi^{ij}\xi^{ij}}{2}. \quad (2.177)$$

A belső változó a termodinamikai egyensúlytól való eltérést jellemzi, a kvadratikus forma megőrzi az entrópia konkávitását a kiterjesztett állapottéren. Vegyük észre, hogy nem az entrópia Taylor-sorának első tagjáról van szó ebben az esetben, a fenti kvadratikus tag együttthatója egy. Ez a Morse-lemma miatt egyrészt mindig megtehető, nem jelent megszorítást [323], illetve a változót a továbbiakban ki fogjuk küszöbölni, a fejlődési egyenletekben közvetlenül nem fog megjelenni. Ha valamilyen konkrét fizikai jelentéssel ruháznánk fel a fenti változót, akkor természetesen nem lehetne egy a fenti együtttható, de ekkor is kiküszöbölnénk, az együttthatóval együtt, mint tettük azt az előző fejezetben, a hővezetés esetén bevezetett vektorváltozóval.

Az entrópia parciális deriváltjai

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \varepsilon^{ij}} = \frac{P_r^{ij}}{\rho T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \xi^{ij}} = -\xi^{ij}. \quad (2.178)$$

Itt $P_r^{ij} = T \partial_{\varepsilon^{ij}} s$, rugalmas nyomás. A Gibbs-reláció felírásával is megadhatjuk ugyanezt:

$$d\mathbf{e} = T ds - \frac{P_r^{ij}}{\rho} d\varepsilon^{ij} + T \xi^{ij} d\xi^{ij}. \quad (2.179)$$

Ezek után az entrópia mérlegében az entrópiaprodukciónak megkapható, ha az entrópiaáramsűrűség

$$J^i = \frac{q^i}{T}. \quad (2.180)$$

Ugyanis

$$\rho \dot{s} + \partial^i J^i = \frac{\rho \dot{\mathbf{e}}}{T} + \frac{P_r^{ij}}{T} \dot{\varepsilon}^{ij} - \rho \xi^{ij} \overset{\diamond}{\xi}^{ij} + \partial^i \frac{J^i}{T} = q^i \partial_i \frac{1}{T} - \frac{1}{T} (P^{ij} - P_r^{ij}) \dot{\varepsilon}^{ij} - \rho \xi^{ij} \overset{\diamond}{\xi}^{ij} \quad (2.181)$$

Itt $\overset{\diamond}{\xi}^{ij}$ a belső változó objektív időderiváltját jelöli. Ez természetes módon jelenik meg az entrópiaprodukciónak a fajlagos skalár entrópiafüggvény szubsztanciális deriváltján keresztül (lásd A függelék, illetve [304]). Mivel a belső változó tenzori karaktere elvileg többféle is lehet (kotenзор, vegyes tenzor) ezért ez a derivált is többféle formájú lehet (lásd A függelék). Ebben a kifejezésben a konstitutív függvények a q^i hőáramsűrűség, P^{ij} nyomás és a dinamikai változó fejlődési egyenlete. Ennek megfelelően a termodinamikai erők és áramok:

	Termikus	Mechanikai	Reológiai
Erő	$\partial_i \frac{1}{T}$	$\dot{\varepsilon}^{ij}$	$-\xi^{ij}$
Áram	q^i	$-(P^{ij} - P_r^{ij})/T$	$\rho \overset{\diamond}{\xi}^{ij}$

(2.182)

Vegyük észre, hogy a homogén esetben is hasonló termodinamikai erőket és áramokat kaptunk (lásd (1.60)). Itt is bevezethetjük a viszkózus nyomást a

$$P_v^{ij} = P^{ij} - P_r^{ij} \quad (2.183)$$

definícióval, a folyadékokhoz hasonló módon (2.88). Ideális mechanikai kontinuumra a rugalmas nyomás megegyezik a teljes nyomással. Ideális lineárisan rugalmas kontinumban a nyomás arányos a deformációval, azaz

$$P_r^{ij} = 2\mu\epsilon^{ij} + \lambda\epsilon^{kk}\delta^{ij}, \quad (2.184)$$

ahol μ és λ a Lamé-együtthatók. A termodinamikai erők és áramok közötti lineáris kapcsolatok izotrop esetben kereszteffektust eredményeznek a másodrendű tenzori erők között. A hővezetés ettől független marad, vezetési egyenlete most is a (2.145) Fourier-törvény, mert az izotrópia miatt nem léphet fel csatolás a különböző tenzori rendű mennyiségek között. Tekintsünk most izoterm folyamatokat, hogy a mechanikai-reológiai részt tisztán elemezhesük. Ekkor, izotrop esetben a két tenzornak a deviatorikus (szimmetrikus nyom nélküli) és gömbi része (nyoma) egymástól függetlenül csatolódik, az izotrop függvényekre vonatkozó reprezentációs tételek szerint [331, 332], hiszen az entrópiaprodukció maga is izotrop függvénye változóinak:

$$P_v^{kk} = l_1 T \dot{\epsilon}^{kk} - l_{12} T \xi^{kk}, \quad (2.185)$$

$$\rho \overset{\diamond}{\xi}^{kk} = l_{21} \dot{\epsilon}^{kk} - l_2 \xi^{kk}, \quad (2.186)$$

$$P_v^{\langle ij \rangle} = k_1 T \dot{\epsilon}^{\langle ij \rangle} - k_{12} T \xi^{\langle ij \rangle}, \quad (2.187)$$

$$\rho \overset{\diamond}{\xi}^{\langle ij \rangle} = k_{21} \dot{\epsilon}^{\langle ij \rangle} - k_2 \xi^{\langle ij \rangle}. \quad (2.188)$$

Egy másodrendű tenzor szimmetrikus nyom nélküli részét jelöltük az indexek zárójelével $A^{\langle ij \rangle} = (A^{ij} + A^{ji})/2 - A^{kk}\delta^{ij}/3$. Az együtthatókra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} l_1 &> 0, & l_2 &> 0, & l_1 l_2 - l_{12} l_{21} &\geq 0, \\ k_1 &> 0, & k_2 &> 0, & k_1 k_2 - k_{12} k_{21} &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.189)$$

Láthatóan itt sem tételeztünk fel szimmetriát a kereszteffektusok együtthatóira vonatkozóan, hasonlóan a duális belső változók esetén elmondottakhoz. A fenti egyenletekből kiküszöbölhetjük a belső változót, és közvetlen összefüggéseket kaphatunk a nyomás és a kis deformáció között. Ezt legegyszerűbb megtenni akkor, ha $l_{12} \neq 0$ és $l_2 \neq 0$. A fenti egyenletekből ekkor azt kapjuk, hogy

$$-\tau_0 \overset{\diamond}{P}^{kk} - P^{kk} = \tau_{d0} \ddot{\epsilon}^{kk} + 3K_v \dot{\epsilon}^{kk} + 3K \epsilon^{kk}, \quad (2.190)$$

$$-\tau \overset{\diamond}{P}^{\langle ij \rangle} - P^{\langle ij \rangle} = \tau_d \ddot{\epsilon}^{\langle ij \rangle} + 2\eta \dot{\epsilon}^{\langle ij \rangle} + 2G \epsilon^{\langle ij \rangle}, \quad (2.191)$$

ahol az együtthatók:

$$\tau_0 = \frac{\rho}{l_2}, \quad \tau_{d0} = \rho T \frac{l_1}{l_2}, \quad 3K_v = \frac{1}{l_2} [T(l_1 l_2 - l_{12} l_{21}) + \rho \lambda], \quad 3K = \lambda, \quad (2.192)$$

$$\tau = \frac{\rho}{k_2}, \quad \tau_d = \rho T \frac{k_1}{k_2}, \quad 2\eta = \frac{1}{k_2} [T(k_1 k_2 - k_{12} k_{21}) + \rho 2\mu], \quad G = \mu. \quad (2.193)$$

A negatív előjellel a nyomások előtt ahhoz a tradícióhoz igazodunk, hogy ezeket az egyenleteket többnyire a feszültségekre, azaz negatív nyomásra szokás rendezni.

Poynting–Thomson-, vagy *standard* reológiai modellnek nevezzük a (2.191) egyenlettel leírható kontinuumot, ha az objektív időderivált a szubsztanciális derivált, és $\tau_d = 0$. *Tehetetlenségi Poynting–Thomson-modell*nek nevezzük, ha $\tau_d \neq 0$. *Térfogati Poynting–Thomson*-, vagy *térfogati standard* reológiai modellnek nevezzük a (2.190) egyenlettel leírható kontinuumot, amennyiben $\tau_{d0} = 0$. *Tehetetlenségi térfogati Poynting–Thomson*-modellnek nevezzük, ha $\tau_{d0} \neq 0$. A tehetetlenségi tagot reológiai egyenletekhez termodinamikai megfontolások alapján először Verhás javasolta ebben a formában [323].

A fenti egyenletekkel modellezhető reológiai hatásokat az elmúlt években számos munkában elemeztük, mind kísérleti adatokkal történő összevetés, mind gyakorlati, elsősorban közetmechanikai alkalmazások szempontjából.

1. Az *objektív időderivált* lehetséges formáit a stacionárius egyszerű nyírás esetén tenzor jellegű belső változóval vizsgáltuk [304, 302]-ben. A második viszkometrikus függvényre ez a modellválasztás nullát adott, ami jobban összhangban van a kísérletekkel, mint az egyébként jónak tartott Maxwell-modell, vagy az együtt-forgó deriváltas Jeffreys-modell [24, 175]. Megjegyezzük, hogy a hagyományos reológiai modellekben a különféle objektív deriváltakat teljesen szabadon, mindenféle elvi megfontolás (és termodinamikai háttér) nélkül szokták használni.
2. A standard Poynting–Thomson-modell általánosítását jelentő *tehetetlenségi tag* szerepét célzottan vizsgálta, megoldásokat és kísérleti összevetést adott [283]. Ezek a vizsgálatok a tehetetlenségi tag jelenlétére utalnak. Ezen kívül Matsuki, Takeuchi illetve Lin és társai in situ közetfeszültség meghatározására szolgáló közetreológiai kísérleteikben szintén csak tehetetlenségi Poynting–Thomson-moddellel tudtak megfelelő egyezést elérni a kísérleti adatokkal, egyszerűbb, három paraméteres modellekkel nem [211, 212, 181].
3. A fenti modell felállításánál nem tételeztünk fel sem szimmetriát, sem antiszimmetriát a vezetési egyenletekben, ellentétben [323]-al. Az általános alakú vezetési tenzor vizsgálatával beláttuk, hogy a modell együtthatóinak előjel viszonyai alapján eldönthető, hogy a szimmetrikus, vagy az antiszimmetrikus tag a domináns (ezt neveztük túl- illetve alulcsillapított esetnek). Beláttuk továbbá, hogy a szokott elemkombinációs módon előállított reológiai testek esetén a Verhás-elem nélkül nem fedhető le termodinamikailag lehetséges differenciálegyenlet-paraméterek tere [6, 310, 86]. Az előző pontban említett in situ közetfeszültség meghatározására szolgáló kísérleti vizsgálatokban a három paraméteres modellek elégtelensége azt jelenti, hogy önmagában sem szimmetrikus, sem antiszimmetrikus csatolás nem elegendő közet reológiai viselkedésének modellezésére.
4. Térfogati Poynting–Thomson standard testek lehetőségét a közetmechanikában Dobróka vetette fel [57], tőle függetlenül és jóval később pedig Cristescu [52]. A csatolt térfogati és deviatorikus tehetetlenségi Poynting–Thomson-modellek egyenleteinek megoldását Szarka, Asszonyi és Fülöp adta meg [283]. A térfogati reológia lehetséges szerepét a hagyományos mechanikai paraméterek, a Young-modulus és a különösen a Poisson-tényező mérésében [28] tárgyalja. A kísérleti

adatokkal történő összevetés, a képlékenység egyidejű figyelembe vételével [9]-ban található. Ebben Docamid 6G-H-val végzett laboratóriumi kísérletek esetén egyértelműen kimutathatók a térfogati reológiai hatások.

5. Ezeket a reológiai modelleket gyakorlati problémákra is alkalmaztuk. Az alagútnyitás kérdését a deviatorikus standard modell megoldásával tárgyalja [319]. Ennek jelentős általánosítását adja meg, tetszőleges (!) deviatorikus és térfogati reológiai modellre megoldva az alagútnyitási problémát Fülöp és Béda [88], Asszonyi, Szarka és Béda pedig a Poynting-Thomson modellek eseteit elemzi részletesen [10].

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

*La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit.
Mais c'est cet éclair qui est tout.*¹

Henri Poincaré

3.1. Bevezetés – történeti megjegyzések a hidrodinamikáról

Az előző fejezetekben láttuk, hogy kontinuum- és homogén elméletek hogyan egészítik ki egymást. Számos kontinuumelmélethez – ahol a közhiedelem a lokális egyensúly sérülését vélelmezi, vagy akár a gyengén nemlokális elméletekhez is – létezik és hasznos lehet megkonstruálni a hozzá tartozó homogén termodinamikát, a Gibbs-relációval mint alapösszefüggéssel. Azt is láttuk, hogy a Gibbs-reláció a hagyományos és kényelmes megfogalmazása annak, hogy az entrópia milyen változók függvénye. Bizonyos értelemben ez mindig a legnehezebb kérdés a termodinamikai modellezésben: az alapállapotér kiválasztása és a kinematikai tulajdonságok rögzítése. A speciális relativisztikus folyadékok jó példát mutatnak arra, hogy pusztán homogén rendszerek vizsgálatával az alapvető kinematikai tulajdonságokat is nagyon nehéz tisztázni. Harmadrészt pedig láttuk, hogy a második főtétel miatt a homogén egyensúly aszimptotikusan stabil, és ez a tulajdonság az, amely érthetővé teszi a termodinamikát. Látni fogjuk, hogy a relativisztikus folyadékoknál pedig kulcsszerepe van a helyes elmélet kiválasztásában.

A relativisztikus gáz és folyadék termodinamikai testek homogén relativisztikus kinematikájának tisztázása, azaz a változók kiválasztása elvileg már 1907-ben megtörtént, amikor Planck és Einstein a relativisztikus elektrodinamika és mechanika után a harmadik klasszikus elméletnek, a termodinamikának is megadták a relativisztikus megfogalmazását [69, 260]. Legfontosabb megállapításuk szerint a mozgó testek között energia-impulzus-csere zajlik és nem energia- vagy impulzuscscere: relativisztikusan energia vagy impulzus külön-külön csak vonatkoztatási rendszerfüggően létezik. A relativisztikus elméletekben természetes követelmény a kovariancia, a vonatkoztatási rendszer-függetlenség. Ez lényegében a nemrelativisztikus objektivitás megfelelője. Ezért Planck és Einstein az energiainpulzus-vektort vezette be a kiterjedt termodinamikai test állapothatározójaként, és ennek megfelelően módosították a Gibbs-relációt.² Ebben az időben azonban a kontinuumelmélet (is) meglehetősen fejletlen volt. Ugyan Jaumann nyomán ekkortájt került az alapvető mérlegek közé az

¹ A gondolat csupán villám a hosszantartó éjszakában. De a villám a minden.

² A termodinamika mindkettőjük számára fontos volt: remény és minta a fizika egységes meg-alapozása felé [159].

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

entrópia és az energia [137], de munkássága a kontinuummechanikán kívül gyakorlatilag ismeretlen maradt.³ Az entrópiamérleget a második főtétellel, mint az anyagtörvények származtatásának módszerét Carl Eckart találta ki, ráadásul egy csapásra relativisztikusan is és a kontinuummechanikát is beleértve [64, 65, 66, 67]. Eckart egységes származtatását adta a Fick-, Fourier-, Navier–Stokes-féle anyagtörvényeknek, és ezzel lényegében megalapozta a nemegyensúlyi termodinamikát, mint tisztán makroszkopikus elméletet.

Relativisztikus folyadékokra vonatkozó elméletében Eckart két korlátozó feltevést használt. Egyrészt a belsőenergia-sűrűségnek az energiaiimpulzus-sűrűség tenzor idő-idő-szerű részét tekintette (ez tulajdonképpen ellentmond a Planck-Einstein-felfogásnak), másrészt pedig a folyadék sebességmezőjét a nemrelativisztikus gyakorlatnak megfelelően a részecskeszám-sűrűséghez kötötte. Ez utóbbi problematikus voltát Landau és Lifsic ismerte fel, megállapítva, hogy a sebességmező választás kérdése is lehet, és egykomponensű folyadékok esetén is választhatunk másképp, például az energiát is tekinthetjük a sebességmezőt meghatározó fizikai mennyiségnek [169]. Jelenleg azt gondoljuk (nemrelativisztikusan is), hogy a sebességmező valamilyen anyagi mennyiség áramlását jellemzi – a részecskékét Eckart-áramlás esetén és az energiáét Landau–Lifsic-áramlás esetén – és a különféle áramlásokat szabadon választhatjuk, átszámolhatjuk egymásba. Ezt a szabadságot a kinetikus elmélet messzemenően kihasználja (pl. a momentum-sorfejtés technikái).

Eckart elméletét később két szempontból kritizálták. Egyrészt, a Fourier–Navier–Stokes-egyenletek relativisztikus általánosításaként parabolikus differenciálegyenlet-rendszerre vezet, elvileg végtelen jelterjedési sebességgel. Ez az érv eredetileg a hővezetés nemrelativisztikus elméletére vonatkozott elsősorban [227], de később a relativisztikus elmélet megváltoztatásához is fő motivációként szolgált [230]. Az első ilyen elképzelést, mely az egyenletek kiegészítésével megjavította ezt a hiányosságot, Müller–Israel–Stewart-elméletnek, illetve Israel–Stewart-elméletnek nevezik (a továbbiakban MIS) [131, 132]. Müller ötlete, illetve első javaslata alapján Israel és Stewart egyből kidolgozták a folyadékelmélet kinetikus gázelméleti háttérét és egyszerű gázokra kiszámolták a másodrendű együtthatóit is [133, 134, 280]. Ezt erősítette az Eckart-elmélet generikus instabilitásának, a homogén egyensúlyi megoldás kis perturbációkkal szemben fellépő instabilitásának felismerése [183], majd bizonyítása tetszőleges áramlás esetén [122, 120]. Később Hiscock és Lindblom bizonyították az Israel–Stewart-elmélet generikus stabilitását is [121, 123, 124], de csak Eckart-áramlás (részecskeszámhoz rögzített sebesség) esetén. A generikus stabilitás bonyolult feltételeket követel meg az állapotegyenletre és az egyensúlytól való eltérést jellemző úgynevezett MIS-együtthatókra egyaránt.

A folyadékelméletek kauzalitását szigorúan véve, azaz matematikailag is pontosan csak akkor állíthatjuk, ha az elmélet differenciálegyenlete szimmetrikus hiperbolikus. Ilyen elméleteket fogad el érvényesnek a racionális kiterjesztett termodinamika [187]. A szimmetrikus hiperbolicitás bizonyítása általában nehéz, viszont az úgynevezett divergencia-típusú elméleteket eleve így konstruálják [182, 97, 98]. Ezek az elméletek az MIS elméletnél bonyolultabbak, és kinetikus elmélethez való viszonyukat sem vizsgálták. Divergencia-típusú elméleteket ezért csak mostanában alkalmaztak gyakorlati számításokra [259]. Megjegyzendő, hogy a MIS-elmélet nem divergencia-típusú, és

³ Lásd előző fejezet a 6. lábjegyzetét.

nemhogy a hiperbolicitása, de még a szimmetriája sincs bizonyítva. Csak annyi igaz biztosan, hogy a linearizált változata Eckart-áramlás esetén szimmetrikus hiperbolikus [96].

Fizikailag, a kauzalitás vizsgálatakor nemcsak az egyenletek szerkezetét, hanem érvényességi körét is figyelembe kell venni. Valójában a parabolikus egyenletek relativisztikus esetben sem zárhatóak ki ilyen elvi alapon az érvényes fizikai elméletek köréből. Ugyanis érvényességi körük korlátozza a jelterjedési sebességet. Egyrészt a kontinuum viselkedés megszűnik a közepes szabad úthosszhoz közeli távolságokon, másrészt az adott fizikai mennyiség (hőmérséklet, sűrűség) változása sem lehet akármilyen kicsi: az anyag szerkezete, és a véletlen ingadozások behatárolják azt, továbbá a jel megfigyelhetőségének is vannak korlátai. Ennek megfelelően fizikai jeltovábbítási sebesség általában sokkal kisebb, mint az elvileg lehetséges [79, 335, 162, 314].

Azt is fontos látni, hogy egy elsőrendű elméletet mindig könnyű kiterjeszteni magasabb rendűvé, és ez a kiterjesztés generikusan stabil elméletek esetében jól értelmezhető. Az viszont cseppet sem könnyű kérdés, hogy mondjuk a MIS-elmélet milyen értelemben közelítése a Fourier–Navier–Stokes-elméletnek, milyen feltételekkel azonos a fizikai tartalmuk, ha annak relativisztikus általánosítása, az Eckart-elmélet nem stabil [96, 95].

2005-től kezdve egyre bizonyosabbá vált, hogy a kvark-gluon plazma – ellentétben az előzetes elvárásokkal – nem ideális, hanem inkább disszipatív folyadékként modellezhető [336]. Ezt megerősítették elméleti jóslatok a nyíró viszkozitás minimumára vonatkozóan részben tiszta kvantummechanikai érveléssel [55], illetve az AdS/CFT (anti-de Sitter téridő és konform térelmélet) kapcsolatra vonatkozó sejtésre alapozva [262]. Ezért a disszipatív speciális relativisztikus folyadékokra vonatkozó kutatások is felélénkültek.

Az elmélet szerkezetére vonatkozó vizsgálatok alapvetően két csoportra oszthatóak. A legtöbben elfogadják a Müller–Israel–Stewart-elméletet kiindulópontnak és nem gondolják, hogy a parabolikus elmélet javítható. Ezek a kutatások a MIS elmélet kiegészítését keresik a kinetikus elméletre alapozva [22, 21], de a gyengén nemlokális kiterjesztés egy sajátos fenomenologikus módszere, a gradiens sorfejtés (gradient expansion) is elfogadott és népszerű [267, 13, 12].

A vizsgálatok másik ága a parabolikus, elsőrendű elmélet javítását, elsősorban a stabilitás problémájának megoldását tűzte ki célul. Tsumura, Onoshi és Kunihiro az áramlás választhatóságban rejlő szabadságot használják ki, és ezt a Boltzmann-egyenlet renormálásán alapuló számolással támasztják alá [295, 293, 294]. Sandoval-Villalazo és Garcia-Colin, illetve Garcia-Percinante pedig a belsőenergia-mérlegnek az energiaimpulzus-mérlegtől történő szétválasztásával próbálkozik [93, 94]. A második esetben felmerülő elvi problémákon túlmenően [240] mindkét javaslat közös jellegzetessége, hogy a kapott egyenletek generikus stabilitása feltételes marad, azaz a termodinamikai stabilitáson és a transzportegyütthatók pozitivitásán túlmenően további, elvileg nem indokolható fizikai feltételek esetén áll csak fenn.

Felmerülhet a kérdés, hogy ha a MIS elmélet problematikus, akkor hogyan adhatnak az erre alapozott számítások mégis látszólag kielégítő eredményt a nehézion-ütközések szimulációiban? Ennek két oka van. Egyrészt az, hogy a kinetikus elméletből számolt együtthatók lényegében kielégítik a generikus stabilitás feltételeit, másrészt az, hogy az áramlás választása szinte kivétel nélkül a Landau–Lifsic-féle (gradiens sorfejtés nem is működhetne másként), a Landau–Lifsic-áramlás pedig, mint a következő fejezetek-

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

ben látni fogjuk, kiküszöböli az instabilitást okozó tagokat.

A továbbiakban megmutatom, hogy az előző fejezetek termodinamikai elemzése a felszínre hozza az Eckart-elmélet hiányosságait, és rávilágít arra, hogy a belső energia nem megfelelő definíciója a stabilitási probléma oka. Megmutatom továbbá, hogy a kinetikus elmélettel való kompatibilitás követelménye tovább árnyalja a képet, és a második főtételek egyenlőtlenségének pusztán fenomenologikusan nehezen megtalálható megoldására mutat rá, ahol a Gibbs-reláció teljesen szokatlan formában jelentkezik. Látni fogjuk az is, hogy az így kapott elsőrendű relativisztikus disszipatív hidrodinamikai elmélet generikusan stabil. Végül e hidrodinamikai megoldások homogenizálásával a relativisztikus hőmérsékletre vonatkozó eddigi elképzelések is érthető keretbe kerülnek.

Ezen kutatások alapján tehát egy kielégítő disszipatív hidrodinamikai elméletnek három dolgot kell egyszerre teljesítenie:

- A termodinamikai feltételeknek biztosítaniuk kell az elmélet generikus stabilitását. Azaz megköveteljük, hogy a linearizált hidrodinamikai egyenletek homogén egyensúlyi megoldásának aszimptotikus stabilitása következzen az állapotfüggvényekre vonatkozó termodinamikai stabilitási feltételekből és az entrópiaprodukció nemnegativitását biztosító vezetési egyenletekből.
- Kompatibilis legyen a kinetikus elmélet egykomponensű, homogén folyadékokra vonatkozó legegyszerűbb előírásaival.
- Eleget kell tenni a második főtételek konstitutív elemzésével, azaz a Liu-eljárással kapott feltételeknek.

3.2. Az Eckart-elmélet

Ebben az alfejezetben, egyfajta referenciaként, levezetjük Eckart elméletét, egy kicsit általánosabban, mint ő tette: általános áramlással. A továbbiakban a Lorentz-formára vonatkozóan a $diag(1, -1, -1, -1)$ előjel konvenciót fogjuk használni. A mértékegységeket olyan módon választjuk, hogy a Boltzmann-állandó és a fénysebesség értéke legyen az egység $c = 1$, $k_B = 1$. Csak egykomponensű és izotrop folyadékot tárgyalunk, amelynek nincs belső impulzusmomentuma.

A hidrodinamikai alapmennyiségek az N^a részecskeszámsűrűség-vektor, és a T^{ab} energiimpulzus-tenzor. Ezeket egy tetszőleges u^a sebességmező segítségével általánosan a következő formában írhatjuk:

$$N^a = nu^a + j^a, \quad (3.1)$$

$$T^{ab} = eu^a u^b + u^a q^b + q^a u^b + P^{ab}. \quad (3.2)$$

Itt $n = u^a N_a$ részecskeszámsűrűség-vektor u^a szerinti időszerű része, $j^a = \Delta^{ab} N_b$ pedig a térszerű része, ahol $\Delta^{ab} = g^{ab} - u^a u^b$. Ha u^a a folyadék sebességmezője, és a továbbiakban legyen mindig az, akkor a lokálisan együttmozgó rendszerben vett n részecskeszám-sűrűségről és j^a részecskeáram-sűrűségről beszélünk. Mivel a legtöbbet a lokálisan együttmozgó rendszerben vett relatív mennyiségekről lesz szó, ezért a továbbiakban ezt külön nem említjük. Hasonlóan a részecskeszám-sűrűséghez, $e = u_a u_b T^{ab}$ az energiimpulzus-tenzor idő-időszerű része, az energiasűrű-

rűség, $q^a = u_c T^{cb} \Delta_b^a$ az idő-térszerű része az energiaáram, mely megegyezik a tér-időszerű részével, az impulzussűrűséggel, mert belső impulzusmomentum hiányában az energiaimpulzus-tenzor szimmetrikus. Ugyanezen oknál fogva az energiaimpulzus-tenzor tér-térszerű része, a $P^{ab} = \Delta_c^a T^{cd} \Delta_d^b$ nyomás is szimmetrikus.

A sebességmező az általánosan elfogadott nézet szerint nem alapvető fizikai mennyiség, valamilyen konkrét anyagi tulajdonsághoz kell (lehet) rögzítenünk. Ha úgy adjuk meg, hogy $j^a = 0^a$, azaz $u_E^a = \frac{N^a}{\sqrt{N_a N^a}}$, akkor Eckart-áramlásról beszélünk⁴. A Landau–Lifsic -áramlást akkor kapjuk, ha az energiát tekintjük a folyadék mozgását meghatározó mennyiségnek, azaz ekkor $q^a = 0^a$ és a definíció implicit: $u_{LL}^a = \frac{u_{LL}^b T_b^a}{\sqrt{u_{LL}^c T_c^d T_{de} u_{LL}^e}}$. Megjegyzendő, hogy ez csak akkor tehető meg, ha az energiaimpulzus-tenzornak van időszűrésű sajátvektora (például az elektromágneses sugárzási tér energiaimpulzus-tenzorának nincs).

A nemrelativisztikusan már megismert $\frac{d}{d\tau} := u^a \partial_a$ szubsztanciális deriváltat itt legtöbbször együttmozgó deriválnak nevezik, és pontozással jelölik. Ennek segítségével a részecskeszám és az energia-impulzus megmaradása a fenti relatív mennyiségekkel a következőképpen írható

$$\partial_a N^a = \dot{n} + n \partial_a u^a + \partial_a j^a = 0, \quad (3.3)$$

$$\partial_b T^{ab} = \dot{e} u^a + e u^a \partial_b u^b + \dot{q}^a + q^a \partial_b u^b + e \dot{u}^a + u^a \partial_b q^b + q^b \partial_b u^a + \partial_b P^{ab} = 0^a. \quad (3.4)$$

Az utóbbi egyenletet célszerű energia- és impulzusmegmaradásra bontani.

$$u_a \partial_b T^{ab} = \dot{e} + e \partial_b u^b + u_a \dot{q}^a + \partial_b q^b + u_a \partial_b P^{ab} = 0, \quad (3.5)$$

$$\Delta_c^a \partial_b T^{cb} = e \dot{u}^a + \Delta_b^a \dot{q}^b + q^a \partial_b u^b + q^b \partial_b u^a + \Delta_c^a \partial_b P^{cb} = 0^a. \quad (3.6)$$

A mechanikai disszipáció a folyadékban lokális, a sebességmezőhöz viszonyított mennyiségekkel írható fel, ezért kellett felírunk a mérlegeket idő és térszerű komponensekkel. A termodinamika itt is a lokális mennyiségek között mond viszonyokat, hasonlóan a nemrelativisztikus esethez.

Az Eckart-elméletben a lokális egyensúly definíciója egyszerű és ésszerű, a nemrelativisztikus eset legkézenfekvőbb általánosítása. Az entrópiasűrűség a lokálisan nyugvó vonatkoztatási rendszerben az ugyanabban a vonatkoztatási rendszerben vett e energiasűrűség és n részecskeszámsűrűség függvénye, $s = s(e, n)$. Az Eckart-elmélet Gibbs-relációja az (1.10) nemrelativisztikushoz hasonlóan

$$de = T ds + \mu dn, \quad (3.7)$$

ahol T a hőmérséklet, μ a kémiai potenciál, $s = u_a S^a$ az entrópiasűrűség a lokálisan nyugvó vonatkoztatási rendszerben, ahol S^a jelöli az entrópia négyesáram-sűrűséget. Itt a szokott módon szedhetjük szét az entrópiát u^a szerinti idő- és térszerű részekre, azaz s entrópiasűrűségre és J^a entrópiaáram-sűrűségre:

$$S^a = s u^a + J^a. \quad (3.8)$$

Természetesen az extenzivitást érvényesnek tekintjük és ezért az (1.11) Gibbs-Duhem reláció és a nyomást definiáló potenciál-tulajdonság nem változik.

⁴ Ez megfelel a nemrelativisztikus baricentrikus sebességnek, amennyire csak megfelelhet.

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

Eckart az entrópiamérleget állította tárgyalásának középpontjába és ennek segítségével definiálta a disszipativitást úgy, ahogy ez a nemegyensúlyi termodinamikában azóta általános. A konstruktív elmélethez a lokális egyensúlyon kívül az entrópiaáramot is valahogy meg kell állapítani. Ez utóbbiról is azt feltételezte, hogy a nemrelativisztikus esethez hasonlóan

$$J^a = \frac{q^a}{T} - \frac{\mu}{T} j^a \quad (3.9)$$

formában írható. Ekkor az entrópiamérleg forrás tagja kiszámolható:

$$\partial_a S^a = \dot{s} + s \partial_b u^b + \partial_a J^a = \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{T} \dot{e} - \frac{\mu}{T} \dot{n} + \partial_a \left(\frac{q^a - \mu j^a}{T} \right) = \quad (3.11)$$

$$= -j^a \partial_a \frac{\mu}{T} + \frac{1}{T} \Pi^{ab} \partial_a u_b + q^a \left(\partial_a \frac{1}{T} + \frac{\dot{u}_a}{T} \right) \geq 0. \quad (3.12)$$

Itt $\Pi^{ab} = P^{ab} + \Delta^{ab} p$, ahol a p nyomást (1.11) alapján kapjuk. Ez az entrópia-produkció analóg a nemrelativisztikus (2.100) formulával, termodinamikai erőket és áramokat azonosíthatunk benne. Kézenfekvően ebben a kvadratikus formulában is j^a , Π^{ab} és q^a a termodinamikai áramok, a konstitutív mennyiségek, szorzóik pedig a megfelelő termodinamikai erők. Ezek között lineáris kapcsolatot feltételezve izotrop anyagokra megkapjuk a nemrelativisztikus Fourier–Navier–Stokes anyagtörvények Eckart-féle relativisztikus általánosítását:

$$q^a = \lambda \Delta^{ab} \left(\partial_b \frac{1}{T} + \frac{\dot{u}_b}{T} \right), \quad (3.13)$$

$$j^a = -\xi \Delta^{ab} \partial_b \frac{\mu}{T}, \quad (3.14)$$

$$\Pi^{ab} = 2\eta \partial^{(a} u^{b)} + \zeta \partial_c u^c \Delta^{ab}. \quad (3.15)$$

ahol λ a hővezetési együttható, ξ a diffúziós együttható, η, ζ a nyíró és térfogati viszkozitások. A $\langle \rangle$ zárójel a zárójellezett indexekre vett szimmetrikus, nyom nélküli részt jelöli itt is, azaz

$$\partial^{(a} u^{b)} = \Delta_c^a \Delta_d^b \left(\frac{\partial^c u^d + \partial^d u^c}{2} - \frac{1}{3} \partial_e u^e \Delta^{cd} \right).$$

Az entrópiaprodukció fenti formájának váratlan következménye a gyorsulásfüggő (3.13) Fourier–Eckart-törvény. A gyorsulás megjelenése az energiaáram részeként az energia-impulzus-csere termodinamikai fontosságára utal.

3.3. Termodinamikai elemzés

⁰Az előző részben ismertetett gondolatmenet gyengeségei ugyanazok, amit a nemrelativisztikus vizsgálatoknál már említettünk. Miért pont így választjuk az entrópiaáram-sűrűséget? Lehetnek-e azok a konstitutív függvények változói, amelyek az erő-áram-párok kijelölése során megjelentek? Illetve meg kellene érteni a sajátos

⁰ Ez a fejezet a [303] munkámon alapul.

relativisztikus újdonságot, az energiaáramba került gyorsulást. Láttuk a nemrelativisztikus esetben, hogy a klasszikus irreverzibilis termodinamika heurisztikus feltevései pontos feltételekhez vannak kötve, bonyolultabb viszonyok között egy mélyebb elemzés segíthet ezeket a feltevéseket általánosítani. Tehát ebben a fejezetben Liu eljárását alkalmazzuk gyengén nemlokális relativisztikus folyadékokra.

Az előző alfejezetben láttuk, hogy a (3.3) részecske- és a (3.4) energiaimpulzus-mérleg lesznek a kényszerek az entrópiamérleghez, és ezért

- az *alapváltozók terét* (n, e, u^a) , a részecskeszám-sűrűség, az energiasűrűség és a sebességmező feszítik ki,
- a másodrendűen nemlokális *konstitutív állapotteret* a $(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n, \partial_{ab} e, \partial_{bc} u^a, \partial_{ab} n)$ változók feszítik ki,
- az *anyagfüggvények* pedig a j^a, q^a, P^{ab} részecskeáram, energiaáram és nyomás lesznek.

Eckarthoz hasonlóan a lokálisan nyugvó rendszerben vett mennyiségekkel keressük a termodinamikai összefüggéseket. Általában is igaznak tűnik, hogy a termodinamika mindig feltételez egy közeget, a disszipáció a közeg egyfajta ideális mozgására vonatkoztatva zajlik. A transzportegyenletek pontosan a térbeli inhomogenitások hatására létrejövő lokális változásokat írják le. Hangsúlyozzuk, hogy a lokális egyensúly nem azt jelenti, hogy a lokálisan a folyadék minden pontjában az egyensúlyi impulzuseloszlás lesz érvényes, hanem azt, hogy az impulzuseloszlás torzulása a termodinamikai paraméterek gradienseivel, térszerű deriváltjaival leírhatóak. Ezért nem remélhető, hogy értelmes termodinamikai összefüggéseket kapnánk a sebességmező nélkül.

Az entrópiamérleg egyenlőtlenségében a részecskeszám-mérleget λ , az impulzusmomentum-mérleget Λ^a Lagrange–Farkas-szorzóval figyelembe véve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
 \partial_a S^a - \Lambda_b \partial_b T^{ab} - \lambda \partial_a N^a = & \\
 = \partial_e S^a \partial_a e + \partial_{u^b} S^a \partial_a u^b + \partial_n S^a \partial_a n + \partial_{\partial_b e} S^a \partial_{ab} e + \partial_{\partial_b u^c} S^a \partial_{ab} u^c + \partial_{\partial_b n} S^a \partial_{ab} n + & \\
 + \partial_{\partial_{bc} e} S^a \partial_{abc} e + \partial_{\partial_{bc} u^d} S^a \partial_{abc} u^d + \partial_{\partial_{bc} n} S^a \partial_{abc} n - & \\
 - \lambda \left(\partial_e N^a \partial_a e + \partial_{u^b} N^a \partial_a u^b + \partial_n N^a \partial_a n + \partial_{\partial_b e} N^a \partial_{ab} e + \partial_{\partial_b u^c} N^a \partial_{ab} u^c + \right. & \\
 + \partial_{\partial_b n} N^a \partial_{ab} n + \partial_{\partial_{bc} e} N^a \partial_{abc} e + \partial_{\partial_{bc} u^d} N^a \partial_{abc} u^d + \left. \partial_{\partial_{bc} n} N^a \partial_{abc} n \right) - & \\
 - \Lambda_a \left(\partial_e T^{ab} \partial_b e + \partial_{u^c} T^{ab} \partial_b u^c + \partial_n T^{ab} \partial_b n + \partial_{\partial_c e} T^{ab} \partial_{bc} e + \partial_{\partial_c u^d} T^{ab} \partial_{bc} u^d + \right. & \\
 + \partial_{\partial_c n} T^{ab} \partial_{bc} n + \partial_{\partial_{cd} e} T^{ab} \partial_{bcd} e + \partial_{\partial_{cd} u^e} T^{ab} \partial_{bcd} u^e + \left. \partial_{\partial_{cd} n} T^{ab} \partial_{bcd} n \right) \geq 0. &
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

A harmadrendű deriváltak együtthatóinak eltűnése a következő Liu-egyenleteket adja:

$$\partial_{abc} e : \quad \partial_{\partial_{bc} e} S^a - \lambda \partial_{\partial_{bc} e} N^a - \Lambda_d \partial_{\partial_{bc} e} T^{da} = 0^{abc}, \tag{3.17}$$

$$\partial_{abc} u_d : \quad \partial_{\partial_{bc} u^d} S^a - \lambda \partial_{\partial_{bc} u^d} N^a - \Lambda_e \partial_{\partial_{bc} u^d} T^{ea} = 0^{abcd}, \tag{3.18}$$

$$\partial_{abc} n : \quad \partial_{\partial_{bc} n} S^a - \lambda \partial_{\partial_{bc} n} N^a - \Lambda_d \partial_{\partial_{bc} n} T^{da} = 0^{abc}. \tag{3.19}$$

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

Itt az egyenlőség csak az abc -ben teljesen szimmetrikus részére áll fenn az egyenleteknek. Egy megoldásuk megadható, ha feltételezzük, hogy a Lagrange–Farkas-szorozók csak elsőrendűen nemlokális konstitutív függvények, azaz

$$(\lambda, \Lambda^a) = (\lambda, \Lambda^a)(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n) \quad (3.20)$$

Ez természetesen nem a legáltalánosabb lehetőség. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$S^a - \lambda N^a - \Lambda_b T^{ab} - A^a = 0^a, \quad (3.21)$$

ahol $A^a = A^a(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n)$ tetszőleges elsőrendűen gyengén nemlokális konstitutív függvény lehet, amelynek u^a szerinti tér- és időszerű részét $\alpha^a = \Delta_b^a A^b$ -vel, illetve $a = u^b A_b$ -val jelöljük. A továbbiakban fontos szerepet játszik a Λ_a multiplikátor tér- és időszerű részre történő hasonló felbontása, amit a következőképpen teszünk meg:

$$\Lambda^a = \frac{u^a + w^a}{T}, \quad (3.22)$$

ahol $w^a u_a = 0$. Vegyük észre, hogy ez a felbontás teljesen általános, csak kiemeltük a vektor időszerű részét és vettük annak abszolút értékét, $1/T$ -t. Vezessük be továbbá ezen kívül a következő jelöléseket: $\lambda = \mu/T$ és $a = -p/T$. Ezek után a fenti, (3.21) összefüggést a következőképpen bonthatjuk idő és térszerű részre:

$$\frac{1}{T} \left(Ts + \mu n - e - w_b q^b - p \right) u^a + J^a + j^a \frac{\mu}{T} - \frac{q^a}{T} - w_b P^{ab} + \alpha^a = 0^a. \quad (3.23)$$

Az időszerű rész ezek szerint azt adja, hogy:

$$e + w_a q^a = (u_a + w_a) E^a = Ts + \mu n - p, \quad (3.24)$$

ahol $E^a = u_b T^{ab}$ az energiaimpulzus-vektor. A térszerű rész nulla volta pedig az entrópiaáramot adja. Itt ismét egy speciális feltétellel élve megköveteljük, hogy a nyomás legfeljebb elsőrendű gyengén nemlokális függvény legyen, azaz $P^{ab} = P^{ab}(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n)$. Illetve feltesszük, hogy $\alpha^a = w_b P^{ab}$, ezért az entrópiaáram sűrűsége:

$$J^a = \frac{q^a}{T} - j^a \frac{\mu}{T}. \quad (3.25)$$

Ennek az egyenlőségnek a felhasználásával a (3.16) entrópiaprodukciónak a következő

formára egyszerűsödik:

$$\begin{aligned}
\sigma = & \partial_a e \left[u^a \left(\partial_e s - \frac{1}{T} - \frac{w_b}{T} \partial_e q^b \right) + q^a \partial_e \frac{1}{T} - j^a \partial_e \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_b \partial_e P^{ab} \right] + \\
& + \partial_a u^b \left[u^a \left(\partial_u^b s - \frac{w_b}{T} e + \frac{q_b}{T} - \frac{w_c}{T} \partial_{u^b} q^c \right) + \right. \\
& + q^a \partial_{u^b} \frac{1}{T} - j^a \partial_{u^b} \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_c \partial_{u^b} P^{ca} + \frac{P_b^a + \Delta_b^a p - w_b q^a}{T} \left. \right] + \\
& + \partial_a n \left[u^a \left(\partial_n s - \frac{1}{T} - \frac{w_b}{T} \partial_n q^b \right) + q^a \partial_n \frac{1}{T} - j^a \partial_n \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_b \partial_n P^{ab} \right] + \\
& + \partial_{ab} e \left[u^a \left(\partial_{\partial_b e} s - \frac{w_c}{T} \partial_{\partial_b e} q^c \right) + q^a \partial_{\partial_b e} \frac{1}{T} - j^a \partial_{\partial_b e} \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_c \partial_{\partial_b e} P^{ca} \right] + \\
& + \partial_{ab} u^c \left[u^a \left(\partial_{\partial_b u^c} s - \frac{w_d}{T} \partial_{\partial_b u^c} q^d \right) + q^a \partial_{\partial_b u^c} \frac{1}{T} - j^a \partial_{\partial_b u^c} \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_d \partial_{\partial_b u^c} P^{ad} \right] + \\
& + \partial_{ab} n \left[u^a \left(\partial_{\partial_b n} s - \frac{w_c}{T} \partial_{\partial_b n} q^c \right) + q^a \partial_{\partial_b n} \frac{1}{T} - j^a \partial_{\partial_b n} \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_c \partial_{\partial_b n} P^{ca} \right] \geq 0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Ha $s = s(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n)$ elsőrendűen gyengén nemlokális, akkor tovább egyszerűsíthetjük az entrópiaprodukciót:

$$\begin{aligned}
\sigma = & \left(\dot{s} - \frac{\dot{e}}{T} + \frac{\mu}{T} \dot{n} - \frac{w_b}{T} \dot{q}^b + \frac{q_b - ew_b}{T} \dot{u}^b \right) + \\
& + q^a \partial_a \frac{1}{T} - j^a \partial_a \frac{\mu}{T} + \frac{1}{T} \left(P^{ab} + p \delta^{ab} \right) \partial_a u_b - \frac{w_b}{T} \left(\partial_a P^{ab} + q^a \partial_a u^b \right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Ennek az egyenlőtlenségnek keressük a lokális egyensúllyal összeegyeztethető megoldásait. Ez azt jelenti, hogy az entrópia parciális deriváltjait az első, zárójeles kifejezésben kell megfelelően rögzítenünk. Kínálkozik, hogy az entrópia közvetett módon függjön az állapottér derivált változóitól, azaz $s = s(e, q^a(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n), n)$ módon. Tehát a Lagrange–Farkas-szorzókat, azaz a T, μ, w_a függvényeket az entrópia deriváltjaival azonosítjuk:

$$\partial_e s = \frac{1}{T}, \quad \partial_n s = -\frac{\mu}{T}, \quad \partial_{q^a} s = \frac{w_a}{T}. \tag{3.28}$$

Ezek után, ha nem szeretnénk, hogy az entrópiasűrűség közvetlenül a sebességtől is függjön, akkor a zárójeles kifejezés további része a következő parciális differenciálegyenletre vezet:

$$\frac{q_b - ew_b}{T} = q_b \partial_e s - e \partial_{q^b} s = 0. \tag{3.29}$$

Ennek a parciális differenciálegyenletnek általános megoldása $s(e, q^a, n) = \hat{s}(e^2 + q^a q_a, n)$. Amennyiben pedig elvárjuk, hogy az entrópiasűrűség homogén nulladrendű függvénye legyen az energiasűrűségnek, azaz megőrizzük az extenzivitást, akkor az $s(e, q^a, n) = \hat{s}(\sqrt{e^2 + q^a q_a}, n) = \hat{s}(\|E^a\|, n)$ entrópiasűrűség csak az energiaimpulzusvektor abszolút értékétől függhet.

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

A vonatkozó Gibbs-reláció a következő lesz:

$$de + \frac{q_a}{e} dq^a = Tds + \mu dn. \quad (3.30)$$

A lokális egyensúly ezen Gibbs-reláción alapuló definíciójából származtatott hidrodinamikai elmélet generikusan stabil általános áramlások mellett, de a következő 3.4. alfejezetben látni fogjuk, hogy nem kompatibilis a kinetikus elmélettel. A kinetikus elmélettel való kompatibilitást úgy érhetjük el, ha a (3.27) első zárójelében levő összeg nem nulla, hanem egyenlő $pw_a \dot{u}^a/T$ -vel. Mivel az entrópiának a sebességmezőtől való közvetlen függését el szeretnénk kerülni, ezért ez a következő feltételhez vezet:

$$q^a = (e + p)w^a. \quad (3.31)$$

Tehát bevezetve a $h = e + p$ entalpiasűrűséget, a fenti Gibbs-reláció módosításaként azt kapjuk, hogy

$$de + \frac{q_a}{h} dq^a = Tds + \mu dn. \quad (3.32)$$

Vegyük észre, hogy ez a látszólag minimális módosítás termodinamikailag nagyon furcsa, például azért, mert a nyomás már nemcsak a Gibbs–Duhem-relációból definiálódik. A fenti összefüggéseket figyelembe véve a diszipációs egyenlőtlenség, azaz az entrópiaprodukció

$$\sigma = q^a \left[\partial_a \frac{1}{T} + \frac{1}{hT} (h\dot{u}_a + \dot{q}_a + q_a \partial_b u^b) \right] - j^a \partial_a \frac{\mu}{T} + \frac{1}{T} (P^{ab} + p\delta^{ab}) \partial_a u_b \geq 0. \quad (3.33)$$

A fenti (3.32) Gibbs-relációval és az entrópiaáram-sűrűség (3.25) formáját feltételezve ez az entrópiaprodukció kifejezés direkt módon, a Liu-eljárás figyelembe vétele nélkül is kiszámolható [315]. Az Eckart-elmélet vezetési egyenletei, (3.14) a részecskeáramra és (3.15) a viszkózus nyomásra érvényben maradnak, viszont az energiaáramra vonatkozó (3.13) módosul, a következő legyen:

$$q^a = \lambda \Delta^{ab} \left[\partial_b \frac{1}{T} + \frac{1}{hT} (h\dot{u}_b + \dot{q}_b + q_b \partial_c u^c) \right]. \quad (3.34)$$

Tehát az energiaáramot meghatározó termodinamikai erő az ideális hidrodinamikai impulzusmérleg egy részével korrigálódott. A Eckart-elmélethez hasonlóan, az egyszerűség kedvéért itt sem vesszük figyelembe a vektori termodinamikai kölcsönhatások között izotop esetben is lehetséges termodiffúziós (Soret–Ludwig-)kereszteffektust.

3.4. Kinetikus elmélet

⁰Ezek után megvizsgáljuk, hogy a (3.31) feltételt miként kényszeríti ki a kompatibilitás a kinetikus elmélettel. Egykomponensű Boltzmann-gázt tekintünk, külső mezők nélkül, $h = 1$ tömegegység választással. A részecskék nyugalmi tömegét jelölje m ,

⁰ Ez a fejezet a [308, 315] munkákon alapul.

impulzusát pedig p^a , $\sqrt{p^a p_a} = m$. Az $f(x^a, p^a)$ egy részecske eloszlásfüggvényre vonatkozó Boltzmann-egyenlet a következő:

$$p^a \partial_a f = C(f) = \frac{1}{2} \int d\omega_1 d\omega' d\omega'_1 [f' f'_1 W(p', p'_1 | p, p_1) - f f_1 W(p, p_1 | p', p'_1)], \quad (3.35)$$

ahol $f_1 = f(x, p_1)$, $f' = f(x, p')$, $f'_1 = f(x, p'_1)$, $C(f)$ a fenti Boltzmann-féle ütközési integrált jelöli, benne $d\omega = \frac{d^3 p}{p^0}$ az impulzustérbeli mérték (az állandó m hosszúságú impulzusvektorok hiperfelületén vett mérték). $W(p, p_1 | p', p'_1)$ jelöli a (p, p_1) impulzusú részecskepárokból (p', p'_1) impulzusú részecskepárok keletkezésének átmeneti valószínűségét [105].

A részecskeszám-sűrűség négyesvektor, az energiaimpulzus-sűrűség tenzor és az entrópiasűrűség négyesvektor definíciói a következők:

$$N^a = \int d\omega p^a f, \quad (3.36)$$

$$T^{ab} = \int d\omega p^a p^b f, \quad (3.37)$$

$$S^a = - \int d\omega p^a f (\ln f - 1). \quad (3.38)$$

A relativisztikus kinetikus elmélet a lokális egyensúlyt a megmaradó entrópia feltételével definiálja ([105], 43.o.). Ez a *kinetikus lokális egyensúly* nem az, ahogyan a nemegyensúlyi termodinamika fenomenologikusan a lokális egyensúlyt általában érti, hiszen a kinetikus lokális egyensúly definíciójából adódóan ideális folyadékokra vonatkozik.

Itt tegyük egy rövid kitérőt és pillantsunk vissza a lokális egyensúly dolgozatbeli értelmezésére. A klasszikus, 2. fejezetben megadott (illetve lásd például [113]) definíciója szerint a *lokális egyensúlyt* végső soron a Gibbs-reláció érvényessége határozza meg a „szokott, egyensúlyban jól definiált” változóknak. A belső változókra és dinamikai szabadsági fokokra kiterjesztve az értelmezést a *kiterjesztett lokális egyensúlyt* a Gibbs-reláció érvényessége definiálja az újabb változóknak. Végül pedig a gyengén nemlokális rendszerekre érvényes értelemben *gyengén nemlokális egyensúlyt* a homogenizálhatóság, tehát megint csak a Gibbs-reláció érvényessége definiálja a térbeli deriváltakat is megengedő értelemben. A Gibbs-reláció használhatósága pedig azt jelenti, hogy az entrópiasűrűség megadható a rendszert leíró releváns változók függvényében. A kinetikus elmélet fényében mindez úgy értelmezhető, hogy az egyensúlyi eloszlástól való eltérést a kontinuum- alapváltozók deriváltjaival lehet jellemezni. A nemrelativisztikus esetben, csak térbeli deriváltakat figyelembe véve ez a Chapman–Enskog-sorfejtés alapfeltevése. A relativisztikus esetben ezt nem lehet ilyen egyértelműen eldönteni. Ugyanis a feltételezett eloszlásfüggvény-korrekciók a termodinamikai erőkkkel kapcsolatosak, és láttuk, hogy látszólag a gyorsulás is szerepet játszik az energiaáramra vonatkozó termodinamikai erőben. Fontos továbbá az is, hogy maga a Chapman–Enskog-sorfejtés is csak első rendben tekinthető megbízhatónak, már a másodrendben kapott Burnett-egyenletek használhatósága is megkérdőjelezhető és elvi problémái is vannak [281]. Vagyis, a kontinuum-elméletben világosan megfogalmazható lokálisegyensúlyfogalmak közül egyelőre csak néhánynak van kinetikus megfeleltetése.

Visszatérve a disszipációmentesség követelményével meghatározott kinetikus egyensúlyra, az következik, hogy az eloszlásfüggvény logaritmusában ebben az esetben ütközési

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

invariáns kell legyen. Azaz

$$f_0(x^a, p^b) = e^{\alpha - \beta_c p^c} \quad (3.39)$$

tesztölges $\alpha(x^a)$ és $\beta^c(x^a)$ mezők esetén. Az egyensúlyi eloszlásfüggvényre a részecskeszám-mérleg

$$\partial_a N_0^a = \int d\omega p^a \partial_a f_0 = N_0^a \partial_a \alpha - T_0^{ab} \partial_a \beta_b = 0. \quad (3.40)$$

A termodinamikai relációk levezetéséhez számoljuk ki a (3.38) Boltzmann-Gibbs-entrópiát az egyensúlyi eloszlással:

$$S_0^a = \int d\omega p^a f_0 (\ln f_0 - 1) = (1 - \alpha) N_0^a + \beta_b T_0^{ab}. \quad (3.41)$$

(3.40) és (3.41) alapján ekkor

$$\partial_a S_0^a + \alpha \partial_a N_0^a - \beta_b \partial_a T_0^{ab} = 0. \quad (3.42)$$

Vegyük észre, hogy (3.42) bizonyos értelemben triviális összefüggés, hiszen a lokális egyensúlyt az entrópia megmaradásával definiáltuk, és a részecskeszám-mérleg és energiaimpulzus-mérleg szintén könnyen beláthatóan teljesül a Boltzmann-egyenlet értelmében. Viszont láthatóan (3.40) és (3.42) önmagukban a származtatott kontinuummennyiségekre jelentenek követelményt, azaz az egyensúlyi eloszlás α, β_a paramétereire és az entrópia-, részecskeszám-, energiaimpulzus-sűrűség négyesvektorokra és tenzorokra vonatkozóan. Pontosan ezeket a követelményeket akarjuk most megállapítani.

Éppen ezért a fenti összefüggéseket önmagukban kell tekinteni, és első pillantásra úgy tűnhet, hogy egyfajta Legendre-transzformációs összefüggés látható a négyes mennyiségek között. Azonban (3.42) nem értelmezhető általánosított Gibbs-relációként egyszerűen azért, mert nem maguk a deriváltak között, hanem csak a divergenciák között ad meg kapcsolatot. Ezért a termodinamikai relációk megállapításához, a kontrakció figyelembe vételéhez szükség van egy áramlásra, a kontinuum sebességmezőjére.

A (3.39) egyensúlyi eloszlásfüggvény szokásos interpretációja szerint (lásd pl. [180, 105, 38]) a β^a vektorral párhuzamos sebességmezőt vezetünk be. Ez azonban nem feltétlen szükséges. Tekinthejtük az általános esetet is, amikor β^a -t a sebességmezővel párhuzamos és merőleges részre bontjuk:

$$\beta^a = \frac{u^a + w^a}{T}. \quad (3.43)$$

Itt $1/T = \beta_a u^a$ és $w^a = \Delta_b^a \beta^b / \beta_c u^c$. A továbbiakban néha kényelmes lesz használnunk a $g^a = u^a + w^a$ jelölést. Látható, hogy ilyen módon $g^a u_a = 1$ és $w^a u_a = 0$, sőt, $w_a w^a \leq 1$, mert β^a , és ezért g^a is időszerű. Bevezetve a $\mu = \alpha T$ jelölést, az egyensúlyi eloszlásfüggvényt írhatjuk a következő módon is:

$$f_0 = e^{\frac{\mu - p^a (u_a + w_a)}{T}}. \quad (3.44)$$

A kinetikus egyensúlyban érvényes részecskeszámsűrűség-négyesvektor és energiasűrűség-tenzor egyszerűen kiszámolható, ha egyidejűleg bevezetjük a sebességmező hagyományos interpretációját:

$$\hat{u}^a = \frac{\beta^a}{\sqrt{\beta^a \beta_a}} = \frac{u^a + w^a}{\sqrt{1 - w^2}},$$

ahol $w^2 = -w^a w_a$. A továbbiakban ezt, a hagyományos interpretációnak megfelelő speciális \hat{u}^a sebességmezőt *természetes áramlásnak* nevezzük.

Az általános esetben az N_0^a kinetikus egyensúlyi részecskeszám sűrűség vektor és a T_0^{ab} energiaimpulzus-tenzor a következő lesz

$$N_0^a = n g^a = n u^a + n w^a, \quad (3.45)$$

$$T_0^{ab} = (e + p) g^a g^b - p \delta^{ab} = e u^a u^b + q^a u^b + q^b u^a - p \Delta^{ab} + \frac{q^a q^b}{e + p}. \quad (3.46)$$

Az általános áramlás szerinti nyugalmi rendszerben vett fizikai mennyiségek (kalap nélkül) és a természetes áramlás szerinti nyugalmi rendszerben vett fizikai mennyiségek (kalappal) viszonya rövid számolás után: $T = \sqrt{1 - w^2} \hat{T}$, $\mu = \sqrt{1 - w^2} \hat{\mu}$, $n = \hat{n} / \sqrt{1 - w^2}$, $p = \hat{p}$, $e = (\hat{e} + \hat{p} w^2) / (1 - w^2)$ [308]. Az impulzussűrűség és a részecskeszám-sűrűség közötti kapcsolatra megkapjuk a szokásos, általánosan érvényesnek tekintett

$$q^a = (e + p) w^a = \frac{e + p}{n} j^a \quad (3.47)$$

formulát. Ez mutatja, hogy ideális, disszipáció mentes folyadékokra az Eckart- és a Landau–Lifšic-áramlások egybeesnek. Behelyettesítve (3.45) és (3.46) összefüggéseket (3.41)-be kapjuk, hogy

$$S_0^a = \frac{g^a}{T} \left(n T - \mu n + E^b g_b \right), \quad (3.48)$$

ahol $E^a = e u^a + q^a$ az energiaimpulzus-vektor. Az entrópiaáramsűrűség-vektor az általános áramlásban párhuzamos g^a -val. A megfelelő termodinamikai relációkat (3.45) és (3.46) (3.42)-be történő helyettesítésével kapjuk:

$$\begin{aligned} \partial_a S_0^a + \alpha \partial_a N_0^a - \beta_b \partial_a T^{ab} &= \\ &= \frac{g^a}{T} \left(T \partial_a s + \mu \partial_a n - g_b \partial_a E^b - p w^b \partial_a u_b \right) + \frac{\partial_a g^a}{T} \left(T s + \mu n - g_b E^b - p \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Itt a jobb oldal első tagjában nincsenek divergenciák ezért az entrópiasűrűségre vonatkozó függvénykapcsolatok megállapítására alkalmas. Látható, hogy az általános áramlás szerinti entrópiasűrűség a részecskeszám-sűrűségnek, az energiaimpulzus-vektornak és a sebességmezőnek a függvénye $s = s(E^a, n, u^a)$, a következő parciális deriváltakkal:

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \alpha = \frac{\mu}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial E^a} = \frac{g_a}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial u^a} = \frac{p w_a}{T}. \quad (3.50)$$

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

Ugyanezt a differenciálokra vonatkozó Gibbs-relációval is felírhatjuk:

$$g_a dE^a + p w_a du^a = de + w_a dq^a + [(e + p)w_a - q_a] du^a = T ds + \mu dn. \quad (3.51)$$

Felhasználva a (3.47) egyenletet, a relativisztikus folyadékok általános áramlása esetén érvényes lokális egyensúlyt meghatározó Gibbs-reláció

$$de + \frac{q_a}{h} dq^a = T ds + \mu dn, \quad (3.52)$$

ahol $h = e + p$ az entalpiasűrűség. Ha $w^a = 0^a$, akkor megkapjuk az Eckart által feltételezett (3.7) Gibbs-relációt, mint speciális esetet. A Legendre-transzformációs tulajdonságok is teljesülnek, ha (3.49) második felét is figyelembe vesszük. Ez nulla lesz, amennyiben

$$p + g_a E^a = p + e + \frac{q^a q_a}{h} = T s + \mu n. \quad (3.53)$$

Összevetve ezt az egyenletet (3.41)-el megkapjuk az ideális gáz termikus állapotegyenletét: $p = nT$ általános áramlás esetén is.

Tehát a kinetikus elmélet közvetlen igazolást adott (3.32)-re általános áramlás feltételezésével. Az előző fejezetben láttuk, hogy a Gibbs-reláció ilyen formája a gyenge nemlokalitás termodinamikai feltételrendszerével is kompatibilis, bár arról tisztán fenomenologikusan nem könnyű felismerni.

3.5. Generikus stabilitás

⁰Ebben a fejezetben bebizonyítjuk a (3.3), (3.5) és (3.6) mérlegek és a (3.14), (3.15) és a (3.34) konstitutív egyenletek által megadott disszipatív hidrodinamika generikus stabilitását, azaz a linearizált egyenletek homogén egyensúlyi megoldásának aszimptotikus stabilitását.

3.5.1. Homogén egyensúly

A fenti egyenletrendszer egyensúlyi megoldását akkor kapjuk, ha a lokálisan együttmozgó vonatkoztatási rendszerben vett időderiváltak nullák és az entrópiaprodukciónak is nulla, mert a termodinamikai áramok nullák:

$$\Pi^{ab} = 0^{ab}, \quad j^a = 0^a \quad \text{és} \quad q^a = 0^a. \quad (3.54)$$

Ebben az esetben a mérlegek és a konstitutív egyenletek alapján a folyadék egyensúlyban van, ha

$$\begin{aligned} n = \text{áll.}, \quad e = \text{áll.} \quad \Rightarrow \quad T = \text{áll.}, \quad \mu = \text{áll.}, \quad p = \text{áll.}, \\ \partial_a u_a = 0, \quad \partial_a u_b + \partial_b u_a = 0_{ab}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Ezek a feltételek felül a sebességmező homogenitását is megkövetelik:

$$u_a = \text{áll.} \quad (3.56)$$

⁰ Ez a fejezet a [305, 315] munkák alapján íródott.

3.5.2. Linearizálás

Az egyensúlyi mezőket felülvonással, a perturbációkat δ -val jelölve a mezők általában $Q = \bar{Q} + \delta Q$ formában írhatóak. Itt Q lehet az n , e , u^a , q^a , j^a és Π^{ab} fizikai mennyiségek bármelyike. A (3.3), (3.5), (3.6), (3.34), (3.14) és (3.15) egyenletek linearizálása a (3.54)-(3.56) egyensúly körül a következő egyenletrendszert eredményezi:

$$0 = \dot{\delta n} + \bar{n}\partial_a\delta u^a + \partial_a\delta j^a, \quad (3.57)$$

$$0 = \dot{\delta e} + \bar{h}\partial_a\delta u^a + \partial_a\delta q^a, \quad (3.58)$$

$$0 = \bar{h}\dot{\delta u}^a + \Delta^{ab}\partial_b\delta p + \dot{\delta q}^a + \Delta_c^a\partial_b\delta\Pi^{cb}, \quad (3.59)$$

$$0 = \delta q^a - \lambda\Delta^{ab}\left(\partial_b\delta\frac{1}{T} - \frac{h\dot{\delta u}_b + \dot{\delta q}_b}{T}\right), \quad (3.60)$$

$$0 = \delta j^a + \xi\Delta^{ab}\partial_b\delta\frac{\mu}{T}, \quad (3.61)$$

$$0 = \delta\Pi^{ab} - \eta_v\partial_c\delta u^c\Delta^{ab} - \eta\Delta^{ac}\Delta^{bd}(\partial_\gamma\delta u_d + \partial_d\delta u_c - \frac{2}{3}\partial_e\delta u^e\Delta_{cd}). \quad (3.62)$$

A perturbált változók öröklék az eredetiek ortogonalitási tulajdonságait a linearizáció után:

$$0 = u^a\delta q_a = u^a\delta u_a, \quad 0_b = u^a\delta\Pi_{ab}, \quad 0_{ab} = \delta\Pi_{ab} - \delta\Pi_{ba} \quad (3.63)$$

A stabilitásvizsgálathoz időben exponenciális térben síkhullám alakú megoldásokat keresünk: $\delta Q = Q_0 e^{\Gamma t + i k x}$ formában, ahol Q_0 állandó, t és x pedig az egyensúlyi sebességmező által kijelölt idő-, illetve egy tetszőleges térszerű koordináta. Ezért $u^a\partial_a = \partial_t$.

Ezekkel a feltevésekkel a perturbált egyenletek a következők lesznek:

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma\delta n + i k n \delta u^x + i k \delta j^x, \\ 0 &= \Gamma\delta e + h i k \delta u^x + i k \delta q^x, \\ 0 &= \Gamma h \delta u^x + i k (\partial_e p \delta e + \partial_n p \delta n) + \Gamma \delta q^x + i k \delta \Pi^{xx}, \\ 0 &= \Gamma h \delta u^y + \Gamma \delta q^y + i k \delta \Pi^{xy}, \\ 0 &= \Gamma h \delta u^z + \Gamma \delta q^z + i k \delta \Pi^{xz}, \\ 0 &= \delta q^x + i k \tilde{\lambda} (\partial_e T \delta e + \partial_n T \delta n) + \tilde{\lambda} T \Gamma \delta u^x + \frac{\tilde{\lambda} T}{h} \Gamma \delta q^x, \\ 0 &= \delta q^y + \tilde{\lambda} T \Gamma \delta u^y + \frac{\tilde{\lambda} T}{h} \Gamma \delta q^y, \\ 0 &= \delta q^z + \tilde{\lambda} T \Gamma \delta u^z + \frac{\tilde{\lambda} T}{h} \Gamma \delta q^z, \end{aligned} \quad (3.64)$$

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

$$\begin{aligned}
0 &= \delta j^x + ik\xi \left(\partial_e \frac{\mu}{T} \delta e + \partial_n \frac{\mu}{T} \delta n \right), \\
0 &= \delta j^y = \delta j^z, \\
0 &= \delta \Pi^{xx} + ik\tilde{\eta} \delta u^x, \\
0 &= \delta \Pi^{xy} + ik\eta \delta u^y, \\
0 &= \delta \Pi^{xz} + ik\eta \delta u^z, \\
0 &= \delta \Pi^{yy} + ik\tilde{\eta}_v \delta u^y, \\
0 &= \delta \Pi^{zz} + ik\tilde{\eta}_v \delta u^z, \\
0 &= \delta \Pi^{zy}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Itt bevezettük az $\tilde{\eta} = \eta_v + \frac{4}{3}\eta$, $\tilde{\eta}_v = \eta_v - \frac{2}{3}\eta$ és $\tilde{\lambda} = \lambda/T^2$ rövidített jelöléseket. A fenti egyenletrendszer mátrix formában a következő alakú:

$$M_B^A \delta Q^B = 0^A, \tag{3.66}$$

ahol δQ^B a folyadék perturbációját leíró mezőket jelenti

$$\begin{aligned}
\delta Q^B = & (\delta n, \delta e, \delta u^x, \delta q^x, \delta \Pi^{xx}, \delta j^x; \\
& \delta u^y, \delta q^y, \delta \Pi^{xy}, \delta \Pi^{yy}; \delta u^z, \delta q^z, \delta \Pi^{xz}, \delta \Pi^{zz}; \\
& \delta j^y, \delta j^z, \delta \Pi^{yz}).
\end{aligned}$$

A 17x17-es M_B^A mátrix blokkdiagonális formájú:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \tag{3.67}$$

Itt \mathbf{I} a 3x3-as egységmátrix, \mathbf{R} és \mathbf{N} pedig a következők:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} h\Gamma & \Gamma & ik & 0 \\ \tilde{\lambda}T\Gamma & 1 + \Gamma \frac{T\tilde{\lambda}}{h} & 0 & 0 \\ ik\eta & 0 & 1 & 0 \\ ik\tilde{\eta}_v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.68}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & ikn & 0 & 0 & ik \\ 0 & \Gamma & ikh & ik & 0 & 0 \\ ik\partial_n p & ik\partial_e p & \Gamma h & \Gamma & ik & 0 \\ ik\tilde{\lambda}\partial_n T & ik\tilde{\lambda}\partial_e T & \Gamma\tilde{\lambda}T & 1 + \frac{\tilde{\lambda}T}{h}\Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ik\tilde{\eta} & 0 & 1 & 0 \\ ik\xi\partial_n \frac{\mu}{T} & ik\xi\partial_e \frac{\mu}{T} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

(3.66) exponenciálisan növekvő megoldásokat ad, ha Γ és k kielégíti a

$$\det \mathbf{M} = (\det \mathbf{N})(\det \mathbf{R})^2 = 0 \tag{3.70}$$

feltételi egyenletet pozitív valós részű Γ -val. Ennek az egyenletnek a gyökeit megkapjuk, ha az \mathbf{N} és az \mathbf{R} determinánsára vonatkozó karakterisztikus egyenleteket megoldjuk. \mathbf{R} determinánsával a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(h + k^2 \frac{\tilde{\eta} \tilde{\lambda} T}{h}\right) \Gamma + \tilde{\eta} k^2 = 0. \quad (3.71)$$

Ennek az egyenletnek a gyöke negatív. \mathbf{N} determinánsa a következő feltételt adja:

$$\begin{aligned} & \Gamma^3 \left(h + k^2 \frac{\tilde{\lambda} T}{h} \tilde{\eta}\right) + \\ & + \Gamma^2 k^2 \left(\tilde{\eta} + h \xi \partial_n \frac{\mu}{T} - \tilde{\lambda} n \partial_n T + \frac{\tilde{\lambda} T}{h} n \partial_n p + k^2 \frac{\tilde{\eta} \xi T \tilde{\lambda}}{h} \partial_n \frac{\mu}{T}\right) + \\ & + \Gamma k^2 \left[h \partial_e p + n \partial_n p + k^2 \tilde{\eta} \left(\xi \partial_n \frac{\mu}{T} + \tilde{\lambda} \partial_e T\right)\right] + \\ & + k^4 \left[\lambda n (\partial_n p \partial_e T - \partial_e p \partial_n T) + \xi h \left(\partial_e p \partial_n \frac{\mu}{T} - \partial_n p \partial_e \frac{\mu}{T}\right) + \right. \\ & \left. + k^2 \tilde{\eta} \tilde{\lambda} \xi \left(\partial_n \frac{\mu}{T} \partial_e T - \partial_e \frac{\mu}{T} \partial_n T\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

A Routh–Hurwitz-kritérium szerint [160], az $a_0 \Gamma^3 + a_1 \Gamma^2 + a_2 \Gamma + a_3 = 0$ polinom gyökeinek valós része akkor és csak akkor negatív, ha

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (3.72)$$

A nemrelativisztikus esethez hasonlóan ezeket a feltételeket is biztosítják a termodinamikai stabilitás egyenlőtlenségei és a transzport-együtthatók nemnegativitása. Az előbbiek az esetünkben a következők

$$\partial_e \frac{1}{T} = -\frac{\partial_e T}{T^2} < 0, \quad (3.73)$$

$$\partial_n \frac{\mu}{T} > 0, \quad (3.74)$$

$$\Delta_T := \partial_e \frac{1}{T} \partial_n \frac{\mu}{T} - \partial_n \frac{1}{T} \partial_e \frac{\mu}{T} = -\frac{1}{T^2} \left[\partial_e T \partial_n \frac{\mu}{T} - \left(\frac{\partial_n T}{T}\right)^2 \right] < 0. \quad (3.75)$$

A nemrelativisztikus esethez hasonlóan a következő egyenlőtlenségek hasznosak az átalakításokban

$$\partial_e p = -h T \partial_e \frac{1}{T} + n T \partial_e \frac{\mu}{T}, \quad (3.76)$$

$$\partial_n p = -h T \partial_n \frac{1}{T} + n T \partial_n \frac{\mu}{T}, \quad (3.77)$$

$$\partial_n \frac{1}{T} = -\partial_e \frac{\mu}{T}. \quad (3.78)$$

Ez utóbbit már láttuk a (3.75) egyenlőtlenségnél. A fenti azonosságokkal (3.72) utolsó egyenlőtlenségének az igazolása is kézenfekvő (bár hosszadalmas) [315, 305].

Összességében bebizonyítottuk, hogy a fenti folyadék generikusan stabil általános áramlás esetén.

3.6. Homogenizálás – termodinamika

⁰Az előző fejezetekben kiderült, hogy a hidrodinamikai elmélet generikus stabilitása a termodinamikai kapcsolatok pontosabb felismerésén múlik, figyelembe véve a kontinuum- és a kinetikus elmélet követelményeit és feltételeit. Az alapvető termodinamikai összefüggés, a Gibbs-reláció megváltoztatása viszont a relativitáselmélet egyik elsőként vizsgált problémakörét érinti, a relativisztikus termodinamikát, azaz többek között a mozgó testek hőmérsékletének kérdéskörét [260, 69]. A kontinuumok oldaláról lehetőség van a két legfontosabb fogalom tisztázására, azaz a relativisztikus termodinamikai test értelmezésére és a vonatkozó Gibb-reláció levezetésére. Ezt leg-egyszerűbben az energiamérleg homogenizálásával tehetjük meg, hasonlóan a (2.8.2) fejezetben ismertetett nemrelativisztikus esethez. Az itt levezetett Gibb-reláció kölcsönhatásra és a transzformációs tulajdonságokra vonatkozó következményeit, és a relativisztikus termodinamika fordulatos történetét a D függelékben ismertetem.

Tekintsük ismét a (3.4) energiaiimpulzus-mérleget a sebességmező segítségével felírt speciális formájában. A homogenizálódás és a homogén változások szétválasztása érdekében a teljes időderiváltakat jelöljük a szokott módon $d/d\tau = u^a \partial_a$, illetve vezessük be az u^a -társzerű deriváltakat, azaz a gradienst: $\nabla^a = \partial^a - u^a u^b \partial_b$. Ezek segítségével az energiaiimpulzus-mérleg a következő

$$\begin{aligned} \partial_b T^{ab} = (eu^a + q^a) + (eu^a + q^a) \partial_b u^b + p \left(\dot{u}^a + u^a \partial_b u^b \right) - \\ - \dot{u}_b \left(\Pi^{ab} + u^a q^b \right) + \nabla_b (-p \delta^{ab} + \Pi^{ab} + u^a q^b) = 0^a \end{aligned} \quad (3.79)$$

A nyomást felbontottuk két részre a $P^{ab} = -p \Delta^{ab} + \Pi^{ab}$ definícióval. Az alsó sorban elkülönített tagokat egyrészt disszipatív teljesítményként, másrészt felületi hőáramként és felületi disszipatív munkavégzésként interpretálhatjuk. Tegyük fel, hogy a sebességmezőt Eckart definíciója adja meg, ezért a sebesség divergenciája a (3.3) részecskeszám-mérlegből kifejezhető:

$$\partial_a u^a = -\frac{\dot{n}}{n} = \frac{\dot{v}}{v}, \quad (3.80)$$

ahol bevezettük a $v = 1/n$ fajtérfogatot. Ezt behelyettesítve a fenti (3.79) egyenletbe és beszorozva v -vel kapjuk, hogy

$$\dot{e}^a + p(u^a v) = \left[\dot{u}_b \left(\Pi^{ab} + u^a q^b \right) - \nabla_b (-p \delta^{ab} + \Pi^{ab} + u^a q^b) \right] v =: A^a \dot{s} + Q^a. \quad (3.81)$$

Itt bevezettük az $e^a := eu^a + \chi^a = v(eu^a + q^a)$ definícióval a fajlagos energiaiimpulzusvektort, illetve a bal oldalon a fajlagos entrópiát s jelöléssel. Az A^a és Q^a vektormezők négyes értelemben merőlegesek egymásra. Vegyük észre, hogy az $s = s(e^a, vu^a)$ kétváltozós függvény bevezetéséhez $\dot{u}^a = 0^a$ esetben semmilyen fizikai feltételezés nem kell, ekkor az A^a vektor integráló szorzóként létezik (mert p -t is megfelelően választhatjuk le a teljes nyomásból). Ha a sebességmező gyorsulós, akkor viszont az entrópia ilyen bevezetése fizikai feltevés. Érdekes megjegyezni továbbá, hogy a szögletes zárójelben látható kifejezés konkrétan értelmezi az entrópia változás lehetséges forrását, lényegében fordított módon, mint az entrópiaprodukció kiszámításakor tettük.

⁰ Ez a fejezet a [25] munkán alapul.

Ezek után a fenti entrópiafüggvény parciális deriváltjai a következők:

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}^a} = \frac{A_a}{A^b A_b}, \quad \frac{\partial s}{\partial (v u^a)} = p \frac{A_a}{A^b A_b}. \quad (3.82)$$

Bontsuk fel A^a -t a sebességmezővel párhuzamos és merőleges részekre a következő módon bevezetve a már ismerős jelöléseket:

$$T = \sqrt{A^b A_b}, \quad \frac{A_a}{\sqrt{A^b A_b}} = \frac{u^a + w^a}{\sqrt{1 + w^a w_a}} = \frac{g^a}{\sqrt{1 + w^a w_a}}, \quad (3.83)$$

ahol $u^a w_a = 0$, és vegyük észre, hogy ezzel csak a jelölést tettük kényelmesebbé, semmiféle megszorítást nem vezettünk be. Ezután az időderiváltakat tartalmazó (3.81) egyenlet alapján áttérünk a termodinamikában megszokottabb differenciális jelölésekre:

$$d\mathbf{e}^a + p d(u^a \mathbf{v}) = A^a ds + Q^a. \quad (3.84)$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát g^a -val:

$$g_a [d\mathbf{e}^a + p d(u^a \mathbf{v})] = T ds. \quad (3.85)$$

Tovább alakítva a fenti kifejezést kapjuk, hogy

$$d\mathbf{e} + p d\mathbf{v} + w_a d\chi_a + ((\mathbf{e} + p\mathbf{v})w_a - \chi_a) du^a = T ds. \quad (3.86)$$

Ha az entrópia független a sebességtől, akkor $\chi_a = (\mathbf{e} + p\mathbf{v})w_a$ és

$$d\mathbf{e} + \frac{\chi_a}{\mathbf{e} + p\mathbf{v}} d\chi^a = T ds - p d\mathbf{v}, \quad (3.87)$$

ami megegyezik az előző fejezetekben kapott (3.32) és (3.52) kifejezésekkel, ha a fajlagos mennyiségekről áttérünk sűrűségekre és felhasználjuk a kémiai potenciál definíciójaként (3.53)-t.

A fenti gondolatmenettel álcázott homogenizálást végeztünk, kijelöltük a termodinamikai test egy fogalmát és ezzel az előző fejezetekben kapott Gibbs-relációra egy új, független levezetést adtunk.

A homogenizálást expliciten is végrehajthatjuk Reynolds transzporttételének megfelelő alkalmazásával (v.ö. 2.8.2. szakasz). A (3.79) egyenlet integrálásához olyan sebességmezőt kell találni, amely egyetlen paraméterrel jellemezhető térszerű felületet térszerűen fejleszt. Vagyis tekintsünk egy sima sebességmezőt és egy olyan összefüggő H hiperfelületet, amely merőleges a sebességmezőre, és sima a határa. Tegyük fel, hogy ez a hiperfelület egyetlen τ paraméterrel jellemezhetően változik, és eközben továbbra is merőleges marad az u^a sebességmezőre. A nyomás legyen állandó ezen a hiperfelületen, azaz $\nabla^a p = 0^a$, de a sebesség ne legyen az (ezért aztán inerciális sebességmező nem megfelelő, ilyen sebességmezőt ad meg például [201], 224. oldal). Ebben az esetben integráljuk (3.79)-et erre a $H(\tau)$ hiperfelületre. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{H(\tau)} (e u^a + q^a) + (e u^a + q^a) \partial_b u^b + p (\dot{u}^a + u^a \partial_b u^b) dV = \\ = \int_{H(\tau)} \dot{u}_b (\Pi^{ab} + u^a q^b) + \int_{H(\tau)} \nabla_b (-p \delta^{ab} + \Pi^{ab} + u^a q^b) dV. \end{aligned} \quad (3.88)$$

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

Reynolds transzporttételét alkalmazva

$$\dot{E}^a + p(\bar{u}^a V) = \int_{H(\tau)} \dot{u}_b (\Pi^{ab} + u^a q^b) dV + \oint_{\partial H(\tau)} (\Pi^{ab} + u^a q^b) dA_b. \quad (3.89)$$

Itt dA_b a ∂H -vel jelölt H határán vett felületi mérték, a H -ra vett átlagmennyiségeket pedig a következő módon értelmezzük:

$$E^a = E\bar{u}^a + G^a = \int_{H(\tau)} (eu^a + q^a) dV, \quad \bar{u}^a = \frac{1}{V} \int_{H(\tau)} u^a dV. \quad (3.90)$$

Ugyanazzal az indoklással, mint fentebb, mondhatjuk, hogy (3.89) bal oldala az entrópia megváltozásával kapcsolatos. De az is világosan látszik, hogy ez a megváltozás csak részben a felületi hőátadás és disszipatív munkavégzés következménye, (3.89) bal oldalának első tagja a disszipatív térfogati effektusokat tartalmaz. Viszont ettől függetlenül van olyan S függvény, amely egy teljes derivált szorozva egy vektormezővel, azaz

$$\dot{E}^a + p(\bar{u}^a V) = A^a \dot{S}. \quad (3.91)$$

Ez az összefüggés pedig rögzíti az entrópia parciális deriváltjait, és átírható differenciális formába is:

$$dE^a + pd(\bar{u}^a V) = A^a dS, \quad (3.92)$$

ahol (3.83) módon új jelöléseket bevezetve és a fenti egyenlet mindkét oldalát g^a -val megszorozva kapjuk, hogy

$$g_a dE^a + g_a p d(\bar{u}^a V) = T dS = dE + w_a dQ^a + p dV + [(E + pV)w_a - Q_a] du^a. \quad (3.93)$$

Ha az entrópiát sebességfüggetlennek tételezzük, akkor $(E + pV)w_a = Q_a$, és megkapjuk a teljes, zárt termodinamikai testre vonatkozó Gibbs-relációt:

$$dE + \frac{Q_a}{\mathcal{H}} dQ^a = T dS - p dV, \quad (3.94)$$

ahol $\mathcal{H} = E + pV$ az entalpia.

4. Összefoglalás

Ebben a munkában a nemegyensúlyi termodinamika homogén testekre, nemrelativisztikus és relativisztikus kontinuumokra vonatkozó egységes elméletének alapjait vázoltam. Kutatásaimban és elért eredményeimben fontos szerepet játszott az az elvi kérdések vizsgálatával a különböző területek közötti kirajzolódó kapcsolat.

A termodinamika második főtétele alapján az egyszerű, homogén termodinamikai testek egyensúlya aszimptotikusan stabil (1.3.2 és 1.4 fejezetek). Tisztán termodinamikai feltételek (konkáv és növekvő entópia) biztosítják a homogén egyensúly lineáris aszimptotikus stabilitását nemrelativisztikus (2.8 fejezet) és relativisztikus folyadékokra egyaránt (3.5 fejezet).

Az entrópia növekedésének követelménye konstruktívan kiaknázható gyengén nem lokális konstitutív állapotter esetén is. Ehhez az entrópiaáramot konstitutív függvényként kell kezelni. A Liu-eljárás segítségével általános módszer adható a második főtételnek megfelelő anyagtörvények – akár fejlődési egyenletek – konstrukciójára. A 2.3–2.4 fejezetben láttuk ezt a módszert és utána számos példát alkalmazására, többek között a relativisztikus esetben is (2.5, 2.6, 2.7 és 3.3 fejezetek).

Ahhoz, hogy az anyagtörvényeknek valóban csak az anyagra jellemző kapcsolatokat fogalmazzanak meg, a téridőhöz való viszonyukat kell tisztázni. Ebből a szempontból nagyon fontos, hogy az anyagi objektivitás szokott megfogalmazása helytelen (2.2.2 szakasz). Ennek az alapvető megállapításnak egyes következményeit a nemrelativisztikus (és relativisztikus) téridő matematikai modelljeinek segítségével az anyagtörvények konstrukciós módszerében jelennek meg. A pontos megfogalmazást [89, 90] munkák tartalmazzák véges deformációs rugalmasság és képlékenység esetén. A hagyományos elméletek megfelelő újraértékelése, a következmények vizsgálat hosszú folyamat, ebben a munkában a helyes megfogalmazás bizonyos elemeit használtam (2.7 és 2.10 fejezetek, a gyenge nemlokalitás általában, relativisztikus módszer).

A kontinuum és a homogén elméletek közötti viszonyokat rögzítő lokális egyensúly hipotézisének feltételeit és ennek kiterjesztését a gyengén nemlokalis esetre (2.7.3 illetve 3.4 szakaszok) tartalmazzák. A homogén eset egyszerű differenciálegyenlete és a megfelelő Gibbs-reláció a nemrelativisztikus (2.8.2 szakasz) és a relativisztikus egykomponensű folyadékok esetén egyaránt (3.6 szakasz) megkaphatóak a megfelelő kontinuumegyenletek homogenizálásával.

A Természet nem redukálódik részterületekre, azok csak a fejünkben léteznek. A különbözőnek tekintett részterületek egységes módszertannal történő tárgyalása nélkül fontos összefüggéseket egyszerűen nem lehet észrevenni, sok esetben az egyik részterületen történt előrelépést a másik terület problémáinak megoldása során lehet kamatoztani. Legszenvedelmesebben ez talán a relativisztikus disszipatív hidrodinamikában jelentkezik: a termodinamika stabilitási felfogásából következik, hogy a generikus stabilitás feltételei nem lehetnek erősebbek a termodinamikában megszokott előírásoknál, a Liu-eljáráson alapuló nemrelativisztikus általános módszer adaptálása a relativisztikus téridőre megadja az indulópontot az elmélet módosításhoz és az egyenletek

4. Összefoglalás

kiátlagolásával a relativisztikus homogén elmélet, illetve a relativisztikus hőmérsékletfogalom egy új megközelítését kapjuk.

Ugyanennyire fontos volt, bár ebből a munkából kevésbé szembetűnő, hogy elmélet és kísérlet nem áll távol egymástól. A mérnöki gyakorlatban is hasznosíthatóak elvi általános meglátások, vagy szemléletmód, hisz tudjuk például, hogy a kő folyik és a hőmérséklet változása és a hővezetés jelentősen befolyásolja a földalatti létesítmények mechanikai tulajdonságait is. A fordított irány pedig, leplezetten alapvető ebben a munkában. Kövek reológiai tulajdonságaira vonatkozó tapasztalatok nemcsak áttételesen, de konkrétan is számítottak az itt ismertetett kutatási eredményekben.

A. Objektivitás és tér-idő

⁰Ebben a függelékben az anyagi sokaságon értelmezett fizikai mennyiségek transzformációs tulajdonságait vizsgáljuk tér-idő-szemszögből.

A.1. Nemrelativisztikus tér-idő

A klasszikus, nemrelativisztikus tér-időben sem szükségesek a vonatkoztatási rendszerek, és csak egyszerű differenciálgeometriai eszközöket kell használnunk [198, 201]. Ehhez először is az alapfogalmak matematikai reprezentációját kell tisztázni, lehetőleg a relativisztikus tér-idő fogalmaival analóg módon. A tér-időmodell lényeges tulajdonsága, hogy csak valódi fizikai tulajdonságokat reprezentálunk benne matematikailag. A nemrelativisztikus tér-idő modell részletes fizikai motivációját és alapfogalmait illetően [87, 85, 90] ad egyszerű bevezetést.

Egy *nemrelativisztikus tér-időmodellben*

- az M tér-idő egy négydimenziós irányított affin tér az \mathbf{M} alulfekvő vektortér fölött, melynek elemeit *tér-idő vektoroknak* nevezzük.
- az I abszolút idő egydimenziós irányított affin tér az \mathbf{I} egydimenziós vektortér felett, melynek elemeit *időintervallumoknak* nevezünk,
- a $\tau : M \rightarrow I$ időkiértékelés egy affin szürjekció a $\tau : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{I}$ lineáris leképezés felett (az abszolút idő jelenik meg így a modellben),
- a távolságok \mathbf{D} mértékegyenese egy egydimenziós irányított vektortér,
- az Euklidészi szerkezet egy pozitív definit szimmetrikus bilineáris leképezés, $\cdot : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D} \otimes \mathbf{D}$, ahol

$$\mathbf{E} := \text{Ker } \tau \subset \mathbf{M}$$

a térszerű vektorok háromdimenziós lineáris altere.

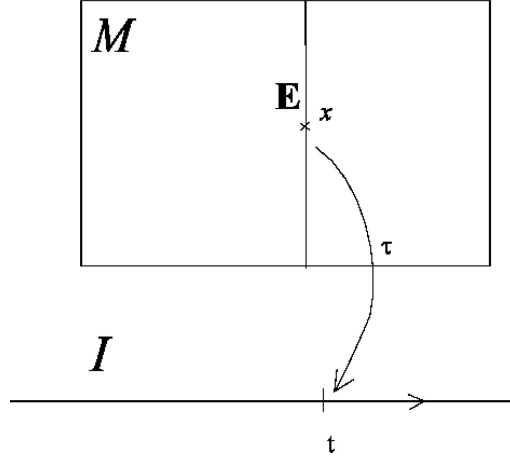
Ekkor az x és y események (tér-időpontok) között eltelt időtartam $\tau(x) - \tau(y) = \tau(x - y)$. Két tér-időpont egyidejű, ha köztük nulla az időtartam. Két egyidejű tér-időpont különbsége egy térszerű vektor. A modell lényeges elemeit az (A.1) ábra mutatja.

Egy $\mathbf{q} \in \mathbf{E}$ tér-idő vektor hossza $|\mathbf{q}| := \sqrt{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}$.

\mathbf{M} duálisát, az $\mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezések terét \mathbf{M}^* -al jelöljük. \mathbf{M}^* elemeit tér-idő kovektoroknak nevezzük. Hasonló módon \mathbf{E} duálisa \mathbf{E}^* .

Ha $\mathbf{K} \in \mathbf{M}^*$ egy kovektor, azaz $\mathbf{K} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ egy lineáris leképezés, akkor \mathbf{E} -re vett megszorítása \mathbf{E}^* eleme, amit $\mathbf{K} \cdot \mathbf{i}$ -val jelölünk és \mathbf{K} abszolút térszerű komponensének nevezzük.

⁰ Ez a függelék a [210] munkánkon alapul.



A.1. ábra. Nem relativisztikus téridő modell

Megjegyezzük, hogy az Euklidészi szerkezet megengedi, hogy a vektorteret segítségével a duálisával azonosítsunk. Esetünkben, a mértékegyenes figyelembe vételével $\mathbf{E}^* \equiv \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}}$ azonosítást eredményezi. Viszont nincs ilyen azonosítás \mathbf{M}^* esetén, mert nincs Euklidészi, vagy pszeudo-Euklidészi szerkezet rajta. Indexekkel: ha \mathbf{E} egy \mathbf{q} elemének indexes jelölése q^i , $i = 1, 2, 3$, akkor $q_i = q^i$ írható. Másrészt \mathbf{M} egy elemét x^a -val jelölve ($a = 0, 1, 2, 3$), $x^a \notin \mathbf{E}$ esetén x_a -nak nincs értelme. Ha pedig az indexeket nem absztrakt értelemben használjuk, hanem egy konkrét koordinátázást jelentenek és x^α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$, akkor x^α a koordinátázást jelöli, pedig akkor x_α -nak egyáltalán nincs értelme. Továbbá, ha $K_a \in \mathbf{M}^*$ koordinátázása K_α $\alpha = 0, 1, 2, 3$, akkor $K^i = K_i$ írható $i = 1, 2, 3$ esetén, de K^0 -nak nincs értelme.

A nemrelativisztikus téridőben tehát természetes módon bevezethetőek négyesvektorok és négyestenzorok, de ezek tulajdonságai bizonyos mértékig eltérnek a relativisztikus analóg mennyiségektől. Az affin szerkezet azért kell, mert sem a térnek, sem az időnek nincs természetes (kitüntetett) középpontja [334, 82]. A vektorok és kovektorok fenti tulajdonságai következményei annak, hogy az idő nem lehet beágyazva a nemrelativisztikus téridőbe. Lehet persze olyan modellt létrehozni, amelyben az idő beágyazott (a leggyakoribb például $\mathbf{I} \times \mathbf{E}$) de ekkor matematikailag lehetséges lenne beszélni olyan fizikai lehetetlenségekről, mint például az idő és egy térirány szöge. Azonban egy ilyen modell nem felelhet meg a kiindulási feltevésnek: nem csak fizikailag indokolt elemeket tartalmaz. Ez a fajta keveredés, a felesleges matematikai elemek jelenléte vezet végső soron a Noll-féle objektivitásdefinícióhoz is. A Matolcsi-féle nem-relativisztikus téridő modellben a téridővektorok és téridőkovektorok megkülönböztetése nagyon lényeges: nincs kanonikus módszer az azonosításukra.

Differenciálás

A téridő affin szerkezete miatt létezik abszolút deriválás (a sokaságok nyelvén: kitüntetett kovariáns deriválás).

Ha V egy véges dimenziós affin tér a \mathbf{V} vektortér felett, akkor egy $A : M \rightarrow V$ leképezés differenciálható az x^a pontban, ha van egy olyan $(DA)(x) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}$ lineáris

leképezés, – A deriváltja x^a -ban – úgy, hogy

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{A(y) - A(x) - (DA)(x)(y - x)}{\|y - x\|} = 0$$

ahol $\| \cdot \|$ egy tetszőleges norma \mathbf{M} -en (egy véges dimenziós vektortéren minden norma ekvivalens). Absztrakt indexes jelölésünket használva $D = \partial_a$.

A fenti téridő szerkezetének egyik következménye, hogy $A : M \rightarrow V$ parciális deriváltjának nincs értelme (csak adott vonatkoztatási rendszerben). Viszont a *térszerű deriváltja* A -nak értelmes, mert a térszerű vektorok \mathbf{M} -ben lineáris alteret képeznek és $(\partial_i A)(x)$ az $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{V}$, $q^i \mapsto A(x + q^i)$ függvény deriváltja a nullában. Világos, hogy $(\partial_i A)(x)$ a $(\partial_a A)(x)$ lineáris leképezés megszorítása \mathbf{E} -re.

Az $\mathbf{A} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}$ lineáris leképezés transzponáltja az az $\mathbf{A}^* : \mathbf{V}^* \rightarrow \mathbf{M}^*$ lineáris leképezés, amelyre igaz, hogy $\mathbf{A}^* \mathbf{w} := \mathbf{w} \mathbf{A} \ \forall \ \mathbf{w} \in \mathbf{V}^*$ esetén. Ekkor, a tenzorok és lineáris leképezések között szokásos azonosításokat felhasználva figyelembe vehető, hogy

$$\partial_a A(x) \in \mathbf{V} \otimes \mathbf{M}^*, \quad (\partial_a A)^*(x) \in \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{V}$$

és

$$y^a \cdot [(\partial_a A)^*(x)] := [\partial_a A(x)] y^a \in \mathbf{V}, \quad (\partial_a A)^*(x) \mathbf{w} \in \mathbf{M}^*$$

minden $y^a \in \mathbf{M}$ és $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^*$ esetén.

Ennek megfelelően

$$(\partial_i A)(x) \in \mathbf{V} \otimes \mathbf{E}^*, \quad (\partial_i A)^*(x) \in \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{V}, \quad (\text{A.1})$$

$$q^i [(\partial_i A)^*(x)] := [(\partial_i A)(x)] q^i \in \mathbf{V}, \quad (\partial_i A)^*(x) \mathbf{w} \in \mathbf{E}^* \quad (\text{A.2})$$

minden $q^i \in \mathbf{E}$ és $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^*$ -ra.

Speciálisan

- egy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező deriváltja a $\partial_a f(x) \in \mathbf{M}^*$ kovektormező,
 - ennek térszerű része egy térszerű kovektor mező $\partial_i f(x) \in \mathbf{E}^*$;
- egy $C^a : M \rightarrow \mathbf{M}$ vektormező deriváltja egy $(\partial_b C^a)(x) \in \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^*$ vegyes tenzormező, amelynek transzponáltja $(\partial_b C^a)^*(x) \in \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}$,
 - ennek térszerű része a $(\partial_i C^a)(x^a) \in \mathbf{M} \otimes \mathbf{E}^*$ vegyes tenzormező, melynek transzponáltja $(\partial_i C^a)^*(x) \in \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{M}$,
- egy térszerű $c^i : M \rightarrow \mathbf{E}$ vektormező térszerű deriváltja a $(\partial_j c^i)(x) \in \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^*$ vegyes tenzormező, amelynek transzponáltja $(\partial_j c^i)^*(x) \in \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}$.
- egy $K_a : M \rightarrow \mathbf{M}^*$ kovektormező deriváltja a $(\partial_a K_b)(x) \in \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$ kotenzormező, amelynek transzponáltja $(\partial_a K_b)^*(x) \in \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$.

A. Objektivitás és téridő

Egy kovektormező deriváltja és annak transzponáltja is $\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$ kovektormező. Így egy K_a kovektormezőnek van abszolút *antiszimmetrikus deriváltja*:

$$(\partial_a \wedge K_b)(x) := (\partial_a \wedge K_b)^*(x) - (\partial_a \wedge K_b)(x). \quad (\text{A.3})$$

Viszont egy $C^a : M \rightarrow \mathbf{M}$ nemrelativisztikus négyes vektormező antiszimmetrikus deriváltjának általában – vonatkoztatási rendszertől függetlenül – nincs értelme. Azonban egy térszerű $c^i : M \rightarrow \mathbf{E}$ vektormező antiszimmetrikus deriváltja értelmezhető mert az $\mathbf{E}^* \equiv \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}}$ azonosítás miatt $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^* \equiv \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}$, így

$$(\partial_i \wedge c^j)(x^a) := (\partial_i \wedge c^j)^*(x) - (\partial_i \wedge c^j)(x).$$

Megfigyelők és vonatkoztatási rendszerek

A négyesvektorokat és tenzorokat a megfigyelők, illetve a vonatkoztatási rendszerek tér- és időszerű részenként észlelik. A szokásos transzformációs tulajdonságok, például a Galilei-transzformáció két inerciális megfigyelő által észlelt vektor térszerű komponensei között ezek segítségével fogalmazhatóak meg.

A tér- és időszerű részekre történő szétbontás az időkiértékelés és a négyessebességek segítségével történik a relativisztikus elmélethez hasonlóan. A sebességek a $V(1) = \{u^a \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I}} \mid \tau_a u^a = 1\}$ halmaz elemei. Egy vektor idő- és térszerű részeit a következő leképezéssel adhatjuk meg:

$$(\tau_a, (\pi_u)^i_a) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{E}, \quad x^a \mapsto (\tau_a x^a, x^a - (\tau_a x^a) u^a). \quad (\text{A.4})$$

A kovektorokra, és a különféle tenzorokra a megfelelő további széthasítási szabályok érvényesek. Egy megfigyelőt egy összefüggő értelmezési tartományú, sima sebességmezőként adunk meg a téridőn, $u^a : M \rightarrow V(1)$. Tehát egy megfigyelő értelmezési tartományának minden pontjában értelmez egy széthasítást minden fizikai mennyiségen. Vonatkoztatási rendszer alatt egy megfigyelőt és $\mathbf{I} \times \mathbf{E}$ vektortér egy koordinátázását értjük.

A megfigyelőkkel és vonatkoztatási rendszerekkel kapcsolatos további finom fogalmakat illetően az irodalomra utalunk ([198, 201, 87], itt mindkét fogalmat lényegében a relativisztikus lokális nyugvó vonatkoztatási rendszer (pl. [38]) analógiájára fogjuk használni. Az alábbiakban több példát is fogunk látni a széthasítás kezelésére és különböző megfigyelőkre vonatkoztatott idő- és térszerű mennyiségek transzformációs szabályaira is.

A.1.1. Anyagi sokaságok

Folyadékok esetén hagyományosan két kitüntetett megfigyelőt használunk. Egyrészt egy külső inerciálisat – ekkor beszélünk lokális leírásról –, másrészt maga a kontinuum, illetve annak sebességmezője is tekinthető megfigyelőnek bizonyos feltételek esetén (ha nem turbulens). Az anyaghoz kötődő és a mozgásból eredő változások megkülönböztetése alapvetően fontos, ha valóban az anyagra jellemző – és nem annak speciális mozgásához kötődő – paramétereket szeretnénk mérni.

Deformálódó anyagok esetén ezért kettős tenzormezőket [292, 113], anyagi sokaságokat [216, 215] illetve számos különböző időderiváltat szoktak bevezetni a változások jellemzésére. Az előző szakaszban láttuk, hogy a téridőről a relativitáselméletben

megismert tapasztalatoknak a nemrelativisztikus esetre történő visszavetítése – annak felismerése, hogy a nemrelativisztikus téridő sem pusztán az egydimenziós idő és a háromdimenziós euklidészi tér szorzata – a deriváltakkal, vektorokkal és kovektorokkal történő műveletekkel történő nagyobb elővigyázatosságot feltételez. Ez a szokott indexes formalizmust és műveleteket nem engedi meg. Ebben a fejezetben megadom az indexes formalizmusnak egy olyan általánosítását, azaz módosított szabályrendszerét, amely a deformálható testek nemrelativisztikus mechanikájában alkalmazható. Ez a formalizmus a Penrose-féle absztrakt indexek szellemében [330] nem kötődik vonatkoztatási rendszerhez és koordináta rendszerhez sem. A formalizmus segítségével kiszámolom a különféle tenzori jellegű mennyiségek deriváltjait, illetve azok tér- és időszerű részeit az anyagra és a téridőre jellemzően. Hasonló nemrelativisztikus négydimenziós formalizmust vezettek például Truesdell és Toupin, illetve Maugin is [292, 206], ezek a munkák azonban nem foglalkoznak az objektív deriváltak kérdésével.

Kinematika

A téridőt a továbbiakban kényelmi okokból vektortérrel reprezentáljuk, pontjait $x^a \in \mathbf{M}$ -el jelöljük. Téridő időre és térre történő széthasítását és a széthasított formát – egy inerciális megfigyelőre vonatkoztatottan – $x^a \prec (t, \mathbf{r}) \in \mathbf{I} \times \mathbf{E}$ módon adjuk meg. Itt és a továbbiakban az $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$ a téridő vektorok négyes indexei. A négyesvektorok függetlenek a vonatkoztatási rendszerektől, a széthasított forma nem az, a széthasítás feltételez egy megfigyelőt. A hangsúly itt nem az inerciarendszerek egyenértékűségén, hanem az inerciális „laborrendszer” és a neminerciális közegmozgás közötti különbségeken van.

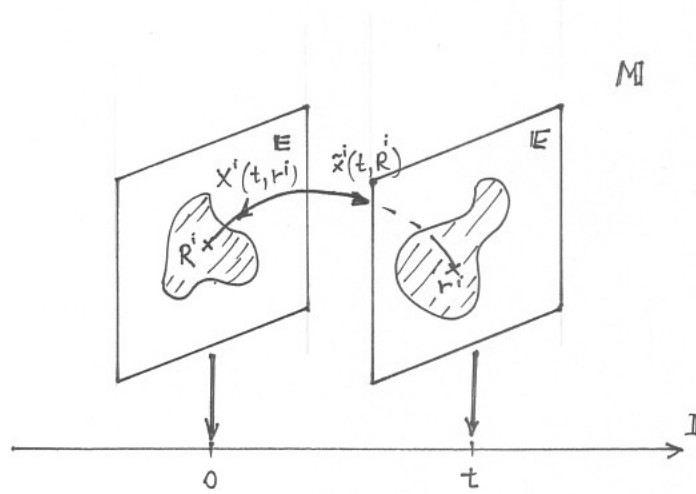
Az anyag pontjait $X^a = (t, \mathbf{R}) \in \mathbf{M}_A = \mathbf{I} \times \mathbf{A}$ -val jelöljük, ahol \mathbf{A} a kontinuum pontjait reprezentáló háromdimenziós vektortér. Ebben az írásban a pontokat a szokásos módon egy alkalmasan választott t_0 időpontban a térben elfoglalt helyzetükkel reprezentáljuk. Ennek a reprezentációnak a problémáival és ezeknek a problémáknak megoldásával, azaz az anyag alakváltozásának fizikai reprezentációjával [85] foglalkozik részletesen.

A kontinuumot a téridőbeli viselkedését jellemző *létezésfüggvénye* adja meg:

$$\tilde{x}^a : \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M} : (t, \mathbf{R}) \mapsto \tilde{x}^a(t, \mathbf{R}) \prec \begin{pmatrix} t \\ \tilde{x}^i(t, \mathbf{R}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

ahol $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ a térvektorok hármass indexei. A vektorok és tenzorok széthasításának jelölésére is használjuk a fent bevezetett \prec jelölést. Az időszerű komponenseket, deriváltakat 0 vagy t indexszel jelölöm. $\tilde{x}^i(t, \mathbf{R})$ a jól ismert mozgásfüggvény, \mathbf{r} és \mathbf{R} pedig az inerciális megfigyelő terének, illetve az anyagi sokaság relatív helyzetvektorait jelölik. Természetesen itt is használjuk az négyes indexeket, tehát $r^a = (t, r^i)$ és $R^a = (t, R^i)$. A mozgásfüggvény fenti egyszerű négydimenziós általánosításának következményeit tárgyaljuk a továbbiakban. Az $\tilde{x}^a(t, \mathbf{R})$ létezésfüggvény inverzét $X^a(t, \mathbf{r})$ -el jelöljük. Az invertálhatóság maga fizikai követelmény: azt a feltevést fejezi ki, hogy a kontinuum pontonként megmarad létezése során (pl. nem tömörödik több pont egy pontba, stb...). Alapvetően az indexes jelölésmódot fogjuk használni, az előbbi függvényeket például a következő formában is írhatjuk:

$$\tilde{x}^a(t, R^i) \prec \begin{pmatrix} t \\ \tilde{x}^i(t, R^i) \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad X^a(t, r^i) \prec \begin{pmatrix} t \\ X^i(t, r^i) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$



A.2. ábra. A létezésfüggvény és inverze

(Az $\mathbf{I} \times \mathbf{A}$ értékű X^a valójában nem absztrakt indexes: komponensei nem alkotnak olyan négyes egységet, mint az x^a -k.) A kovektorokat sorban, a vektorokat oszlopban jelöljük, lehetőleg összhangban a mátrixszorzás szabályaival. Azonban a mátrixos jelölést csak négyes-hármas viszonylatban, azaz a széthasított esetben tér- és időkomponensek megkülönböztetésekor használjuk. A vektorok felső, a kovektorok alsó indexet kapnak és csak alsó és felső indexekre megengedett az összegzés, mert a tér-idő nem euklidészi vektortér: nemrelativisztikusan nincs téridő-távolság. Az Einstein-konvenciónak megfelelően az azonos indexek összegzést jelölnek. Az \mathbf{M}_A -n értelmezett, azaz *szubsztanciális mennyiségeket* hullámmal jelöljük, az \mathbf{M} -en értelmezett, azaz *lokális mennyiségekre*, másképpen *mezőkre* bevezetett jelöléshez képest. Azaz például az $A(t, \mathbf{r})$ skálarmező szubsztanciális formája $\tilde{A}(t, \mathbf{R}) = A(t, \tilde{x}^i(t, \mathbf{R}))$, vagyis $\tilde{A} = A \circ \tilde{x}^a$ és $A = \tilde{A} \circ X^a$, ahol \circ az összetett függvény jele.

Alapinverzek

\tilde{x}^a és X^a inverzei egymásnak, ezért

$$\tilde{x}^a \circ X^b = \delta^a_b, \quad X^a \circ \tilde{x}^b = \tilde{\delta}^a_b, \quad \tilde{x}^i \circ X^j = \delta^i_j, \quad X^i \circ \tilde{x}^j = \tilde{\delta}^i_j. \quad (\text{A.7})$$

Itt a megfelelő vektorterek identitás leképezése $id_{\mathbf{M}}$, $id_{\mathbf{M}_A}$, $id_{\mathbf{E}}$ és $id_{\mathbf{A}}$ az indexes jelöléssel δ^a_b , $\tilde{\delta}^a_b$, δ^i_j , illetve $\tilde{\delta}^i_j$ lesznek. Vigyázzunk, mert speciálisan a fenti formuláknál a bal oldalon álló függvényeket nem a helyettesítési értékükkel tekintjük (vesd össze (A.10)-el) és általában is jelölésmódunkat igyekszünk éppen csak annyira pontosá tenni, hogy kis odafigyeléssel kényelmes és áttekinthető számolási szabályokat tegyen lehetővé. Ugyanis a nagyszámú különféle, de hasonló függvény közül célszerű mindazokat lehetőleg azonosítani, amelyek fizikai szerepe megegyezik. Ennek megfelelően a létezésfüggvénynek és inverzének a deriváltjai a *létezésgradiens*, $\tilde{Y}^a_b \in \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^*_{\mathbf{A}}$,

és inverze $Z^a_b \in \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{M}^*$, ahol

$$\tilde{Y}^a_b = \tilde{\partial}_b \tilde{x}^a \prec (\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_j) \begin{pmatrix} t \\ \tilde{x}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ \tilde{\partial}_t \tilde{x}^i & \tilde{\partial}_j \tilde{x}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0}_j \\ \tilde{v}^i & \tilde{H}^i_j \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$Z^a_b = \partial_b X^a \prec (\partial_t, \partial_j) \begin{pmatrix} t \\ X^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ \partial_t X^i & \partial_j X^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ V^i & G^i_j \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Itt $\tilde{v}^i = \tilde{\partial}_t \tilde{x}^i$ a szubsztanciális *sebesség*, $V^i = \partial_t X^i$ az *anyagi sebességmező*, $\tilde{H}^i_j = \tilde{\partial}_j \tilde{x}^i$ a szubsztanciális *mozgásgradiens*¹, $G^i_j = (H^{-1})^i_j = \partial_j X^i$ pedig a mozgásgradiens mezőnek, az előbbi mennyiség lokális formájának az inverze. Bevezethetjük még az $\tilde{u}^a = \tilde{\partial}_t \tilde{x}^a$ (szubsztanciális) *négysessebességet* és a $V^a = \partial_t X^a$ *négyes anyagi sebességmezőt*. Természetesen bármelyik szubsztanciális mennyiségnek képezhetjük a lokális formáját is, így például $v^i(t, r^i) = (\tilde{\partial}_t \tilde{x}^i \circ X^a)(t, r^i) = \tilde{\partial}_t \tilde{x}^i(t, X^j(t, r^i))$, amit indexek nélkül $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{r}))$ alakban írhatunk. Ne feledjük, hogy a $\tilde{\partial}_t$ jelölés arra utal, hogy szubsztanciális függvényt deriválunk idő szerint, \mathbf{R} -et állandóan tartva. Általában $\tilde{\partial}_b(\dots) = \tilde{\partial}_b(\dots)|_{\{R^c\}, c \neq b}$ illetve $\partial_b(\dots) = \partial_b(\dots)|_{\{r^c\}, c \neq b}$. Az előbbi példát ezek után rövidebben és egyszerűbben is kifejezhetjük, $v^i = \tilde{\partial}_t x^i$, illetve indexek nélkül $\mathbf{v} = \tilde{\partial}_t \mathbf{x}$ formában, azaz a deriválás a szubsztanciális mennyiségre vonatkozik, de a deriváltat mezőként tekintjük, tehát az értelmezési tartomány a téridő. Általában a deriválás fölötti jel (vagy hiánya) a deriválandó függvény értelmezési tartományát, míg a derivált értelmezési tartományát a függvény feletti jel (vagy hiánya) jelöli. (A.7) második formulájának deriválásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_b(X^a \circ \tilde{x}^c) &= (\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_j) \begin{pmatrix} t \\ X^i(t, \tilde{x}^k(t, \mathbf{R})) = R^i \end{pmatrix} = \tilde{\delta}^a_b = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0}_j \\ \tilde{0}^i & \tilde{\delta}^i_j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ \partial_t \tilde{X}^i + \partial_k \tilde{X}^i \tilde{\partial}_t \tilde{x}^k & \partial_k \tilde{X}^i \tilde{\partial}_j \tilde{x}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V}^i + \tilde{G}^i_k \tilde{v}^k & \tilde{G}^i_k \tilde{H}^k_j \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Innen leolvasható, hogy

$$\tilde{G}^i_k \tilde{H}^k_j = \tilde{\delta}^i_j, \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{V}^i = -\tilde{G}^i_k \tilde{v}^k. \quad (\text{A.12})$$

Természetesen ez a megfelelő mezőkre is igaz, azaz $G^i_k H^k_j = \delta^i_j$ és $V^i = -G^i_k v^k$, hiszen a mátrixok közötti összefüggéseket az értelmezési tartomány megváltoztatása nem befolyásolja.

Deriváltak

A különféle deriváltak közötti kapcsolatokat leolvashatjuk egy skalárfüggvényre történő hatásokból. Szubsztanciális mennyiségekre

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_a \tilde{f} &= \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t \tilde{f} & \tilde{\partial}_i \tilde{f} \end{pmatrix} = \partial_c \tilde{f} \tilde{\partial}_a \tilde{x}^c = \partial_c \tilde{f} \tilde{Y}^c_a = \begin{pmatrix} \partial_t \tilde{f} & \partial_k \tilde{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_i \\ \tilde{v}^k & \tilde{H}^k_i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \partial_t \tilde{f} + \tilde{v}^k \partial_k \tilde{f} & \partial_k \tilde{f} \tilde{H}^k_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

¹ Ezt a mennyiséget angol nevének tükörfordításával sokszor deformációgradiensnek nevezi a magyar szakirodalom.

A. Objektivitás és téridő

Másrészt mezőkre

$$\begin{aligned}\partial_a f &\prec (\partial_t f \quad \partial_i f) = \tilde{\partial}_c f \partial_a X^c = \tilde{\partial}_c f Z^c_a \prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t f & \tilde{\partial}_k f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_i \\ V^k & G^k_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t f + V^k \tilde{\partial}_k f & \tilde{\partial}_k f G^k_i \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Azaz

$$\boxed{\tilde{\partial}_a(\dots) = \partial_c(\dots) \tilde{Y}^c_a}, \quad \boxed{\partial_a(\dots) = \tilde{\partial}_c(\dots) Z^c_a}. \quad (\text{A.15})$$

Ebből következően az idő és térderiváltakra külön is felírva

$$\boxed{\tilde{\partial}_t(\dots) = \frac{d}{dt}(\dots) = \partial_t(\dots) + v^k \partial_k(\dots)}, \quad \boxed{\tilde{\partial}_i(\dots) = \partial_k(\dots) \tilde{H}^k_i}, \quad (\text{A.16})$$

$$\boxed{\partial_t(\dots) = \tilde{\partial}_t(\dots) + V^k \tilde{\partial}_k(\dots)}, \quad \boxed{\partial_i(\dots) = \tilde{\partial}_k(\dots) G^k_i}. \quad (\text{A.17})$$

Itt a szubsztanciális időderiváltra bevezettük a szokásos $\frac{d}{dt}$ jelölést, amit néha ponttal rövidítünk.

Vegyes deriváltak

Igen fontos szerepet játszanak a vegyes második parciális deriváltak egyenlősége alapján felírható összefüggések. Két négyes deriválásra ez triviális, de részben széthasítva felhasználjuk a mozgásgradiens és a sebességek definícióit és a deriváltakra fennt kapott bekeretezett összefüggéseket.

Időderiváltakkal. Először a négyes mennyiségekre (A.15) alapján kapjuk, hogy

$$\tilde{\partial}_t \tilde{Y}^a_b = \tilde{\partial}_t \tilde{\partial}_b \tilde{x}^a = \tilde{\partial}_b \tilde{\partial}_t \tilde{x}^a = \tilde{\partial}_b \tilde{v}^a, \quad \longrightarrow \quad \tilde{\partial}_t \tilde{Y}^a_b = \partial_c \tilde{v}^a \tilde{Y}^c_b, \quad (\text{A.18})$$

$$\partial_t Z^a_b = \partial_t \partial_b X^a = \partial_b \partial_t X^a = \partial_b V^a, \quad \longrightarrow \quad \partial_t Z^a_b = \tilde{\partial}_c V^a Z^c_b. \quad (\text{A.19})$$

Kicsit átalakítva az utóbbi formulákat kapjuk a gyakorlatban használhatóbb azonosságokat, ugyanis (A.18)–(A.19)-ből a sebességderiváltakat kifejezve, (A.8)–(A.9) és (A.11)–(A.12) felhasználásával és (A.18)-nál is mezőkre áttérve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt} Y^a_c\right) Z^c_b &= \partial_b v^a \prec \begin{pmatrix} 0 & 0_k \\ \dot{v}^i & \dot{H}^i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ -G^k_l v^l & G^k_j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \dot{v}^i - \dot{H}^i_k G^k_l v^l & \dot{H}^i_k G^k_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \partial_t v^i & \partial_j v^i \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t Z^a_c Y^c_b &= \tilde{\partial}_b V^a \prec \begin{pmatrix} 0 & 0_k \\ \partial_t V^i & \partial_t G^i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ v^k & H^k_j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \partial_t V^i + \partial_t G^i_k v^k & \partial_t G^i_k H^k_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \dot{V}^i & \tilde{\partial}_j V^i \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Itt a tér-térszerű és idő-térszerű komponensek részben ismerős formulákat eredményeznek.

$$\dot{v}^i = \partial_t v^i - \dot{H}^i_k V^k, \quad \text{azaz} \quad \dot{\mathbf{v}} = \partial_t \mathbf{v} - \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{V} = \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \circ \mathbf{v}, \quad (\text{A.20})$$

$$\partial_j v^i = \dot{H}^i_k G^k_j, \quad \text{azaz} \quad \nabla \mathbf{v} = \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{-1} \quad (\text{A.21})$$

$$\dot{V}^i = \partial_t V^i + \partial_t G^i_k v^k, \quad \text{azaz} \quad \dot{\mathbf{V}} = \partial_t \mathbf{V} + \partial_t \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}, \quad (\text{A.22})$$

$$\tilde{\partial}_j V^i = \partial_t G^i_k H^k_j, \quad \text{azaz} \quad \tilde{\nabla} \mathbf{V} = \partial_t \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H}. \quad (\text{A.23})$$

A legutolsó összefüggésnél az inverzfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályt használtuk fel.

Térderiváltakkal. Ekkor kicsit keverve a különböző széthasított alakokat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_i \tilde{Y}^b_c &\prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \tilde{\partial}_i \tilde{v}^j & \tilde{\partial}_i \tilde{H}^j_k \end{pmatrix} = \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_c \tilde{x}^b = \\ &= \tilde{\partial}_c \tilde{\partial}_i \tilde{x}^b \prec \tilde{\partial}_c \begin{pmatrix} 0_i \\ \tilde{H}^j_i \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \tilde{\partial}_t \tilde{H}^j_i & \tilde{\partial}_k \tilde{H}^j_i \end{pmatrix}, \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_i Z^b_c &\prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \partial_i V^j & \partial_i G^j_k \end{pmatrix} = \partial_i \partial_c X^b = \\ &= \partial_c \partial_i X^b \prec \partial_c \begin{pmatrix} 0_i \\ G^j_i \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \partial_t G^j_i & \partial_k G^j_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

A széthasítás jele fölötti index parciális széthasítást jelöl. A tér-térszerű és idő-térszerű komponenseket ismét érdemes kiemelni. A tér-térszerű komponensnek nincs jó index nélküli felírása, mert harmadrendű tenzor részleges szimmetriájára vonatkozik.

$$\tilde{\partial}_i v^j = \dot{H}^j_i, \quad \text{azaz} \quad \tilde{\nabla} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{H}}, \quad (\text{A.26})$$

$$\tilde{\partial}_i H^j_k = \tilde{\partial}_k H^j_i, \quad \text{azaz} \quad -, \quad (\text{A.27})$$

$$\partial_i V^j = \partial_t G^j_i, \quad \text{azaz} \quad \nabla \mathbf{V} = \partial_t \mathbf{G}, \quad (\text{A.28})$$

$$\partial_i G^j_k = \partial_k G^j_i, \quad \text{azaz} \quad -. \quad (\text{A.29})$$

A.2. Anyagi mennyiségek és anyagi deriváltak

A szubsztanciális alak keveri a téridőre és az anyagra vonatkozó mennyiségeket. Az anyagi mennyiségeknek figyelembe kell venni a kontinuum mozgásának következményeit, de azt az anyagra magára vonatkoztatva megadni. Ezt a feltételt egyszerű figyelembe venni, ha megkülönböztetjük a függvényeket az alábbiak szerint:

- lokális: $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^n$ - téridőn értelmezett téridő jellegű függvény,
- szubsztanciális: $\mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M}^n$ anyagon értelmezett téridő jellegű függvény,
- anyagi: $\mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M}_A^n$ az anyagon értelmezett anyag jellegű függvény.

A. Objektivitás és téridő

Itt az n egész szám a fizikai mennyiség tenzori rendjét adja. Mivel az anyag valahol és valamikor van a téridőben, azaz az anyag és a téridő között – feltételezésünk szerint – egyértelmű kapcsolat van, ezért ezek a formák ugyanannak a fizikai mennyiségnek egyenértékű kifejezési módjai. Az értelmezési tartományokat a létezésfüggvény, az értékkészleteket pedig a létezésgradiens segítségével változtathatjuk meg. A fizikai mennyiségek szubsztanciális alakját az eddigiek szerint a mezőkre (lokális alakra) bevezetett jelölés fölött hullámmal, az anyagi alakot kalappal jelöljük.

Skalár

Egy skalármező az egy $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}, (t, \mathbf{r}) \mapsto f(t, \mathbf{r})$ függvény. Ennek szubsztanciális formája megegyezik az anyagi formával, tehát

$$\tilde{f} = \hat{f} = f \circ \tilde{x}, \quad \text{azaz} \quad \tilde{f}(t, \mathbf{R}) = f(t, \tilde{x}^i(t, \mathbf{R})).$$

Ennek megfelelően anyagi deriváltja megegyezik a szubsztanciális deriválttal:

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_a \hat{f} &= \tilde{\partial}_a \tilde{f} = \partial_c \tilde{f} \tilde{\partial}_a \tilde{x}^c = \partial_c \tilde{f} \tilde{Y}_a^c = \\ &= (\tilde{\partial}_t \tilde{f}, \tilde{\partial}_i \tilde{f}) = (\dot{f}, \tilde{\nabla} f) = (\partial_t \tilde{f}, \partial_k \tilde{f}) \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0}_i \\ \tilde{v}^k & \tilde{H}^k_i \end{pmatrix} = (\partial_t \tilde{f} + \tilde{v}^k \partial_k \tilde{f}, \partial_k \tilde{f} \tilde{H}^k_i). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Ebből látható, hogy a skalár mennyiség anyagi idő- és térderiváltjai a következők:

$$\hat{\dot{f}} = \dot{f} = \partial_t f + v^k \partial_k f, \quad \text{azaz} \quad \hat{\dot{f}} = \dot{f} = \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla f, \quad (\text{A.31})$$

$$\hat{\partial}_i f = \tilde{\partial}_i f = \partial_k f H^k_i \quad \text{azaz} \quad \hat{\nabla} f = \tilde{\nabla} f = \nabla f \cdot \mathbf{H}. \quad (\text{A.32})$$

Az anyagi időderiváltra külön jelölést vezettünk be és a formulákat lokális alakban, mezőként adtuk meg. Az anyagi időderivált geometriailag az anyag sebességmezője szerinti Lie-derivált.

Vektor

Egy vektormező lokálisan egy

$$c^a : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto c^a(t, \mathbf{r})$$

függvény. Ennek szubsztanciális és anyagi formái:

$$\begin{aligned} \tilde{c}^a &: \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M}, & \tilde{c}^a &= c^a \circ \tilde{x}, \\ \hat{c}^a &: \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M}_A, & \hat{c}^a &= \tilde{Z}^a_c \tilde{c}^c. \end{aligned}$$

Vektorok anyagi formáját úgy kapjuk, hogy nemcsak az értelmezési tartományt, hanem az értékkészletet is visszahúzzuk az anyagi sokaságra. A négyes vektori mennyiségek nem függenek a vonatkoztatási rendszer mozgásától – viszont felbontásuk idő- és térszerű komponensekre már függ. A megfigyelőt a sebességmezője adja meg [201]. Az anyag maga is meghatároz egy sebességmezőt, ennek megfelelően legalább két célszerű és gyakran használatos felbontása van egy tetszőleges vektori mennyiségnek: egy inerciális megfigyelő és az anyag szerint. Ha az anyag relatív sebességmezője az inerciális

megfigyelő szerint \mathbf{v} (azaz széthasított négyessebessége $v^a \prec (1, v^i)$), akkor a kétféle felbontást vektorok esetén Galilei-transzformáció köti össze a következő módon:

$$c^a \prec \begin{pmatrix} c^0 \\ c^i \end{pmatrix}, \quad c^a \succ \begin{pmatrix} c^0 \\ \bar{c}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 \\ c^i - v^i c^0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

Itt felülvonással az *anyag szerinti felbontást* jelöltük, és az utolsó egyenlőség megadja annak inerciális mennyiségekkel kifejezett alakját. Figyeljük meg, hogy vektornak az időszerű része ugyanaz a különböző megfigyelők számára. A fenti összefüggés megjelenik a vektor anyagi formájának idő- és térszerű komponensekre történő felbontásában is:

$$\hat{c}^a = \begin{pmatrix} \hat{c}^0 \\ \hat{c}^i \end{pmatrix} = \tilde{Z}^a_b \tilde{c}^b \prec \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ -G^i_k v^k & G^j_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^0 \\ c^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 \\ G^i_j (c^j - v^j c^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 \\ G^i_j \bar{c}^j \end{pmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Az anyagi forma deriváltja a *teljes anyagi derivált*

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_a \hat{c}^b &\prec \begin{pmatrix} \dot{c}^0 \\ \tilde{G}^j_k \bar{c}^k \end{pmatrix} (\tilde{\partial}_t \quad \tilde{\partial}_i) = \begin{pmatrix} \dot{c}^0 & \tilde{\partial}_i c^0 \\ (G^j_k \bar{c}^k) & \tilde{\partial}_i (G^j_k \bar{c}^k) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{c}^0 & \tilde{\partial}_i c^0 \\ G^j_k (\dot{c}^k - \bar{c}^l \partial_l v^k) & G^j_k (\tilde{\partial}_i \bar{c}^k - \bar{c}^l \partial_l H^k_i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{c}^0 & \tilde{\nabla} c^0 \\ \mathbf{G}(\dot{\mathbf{c}} - \nabla \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{c}}) & \mathbf{G}(\tilde{\nabla} \bar{\mathbf{c}} - \nabla \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{c}}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Itt az első sor széthasításánál a diadikus szorzat miatt a deriváltak az előttük levő formulára hatnak, ahogy a következő mátrixból látszik. Az átalakításoknál felhasználtuk az inverz mátrix deriváltjára vonatkozó összefüggést, illetve az (A.21) és (A.27) összefüggéseket. A deriválások kijelölése után elhagytuk a szubsztanciális forma jelölését. Az első oszlopból olvasható ki az anyagi időderivált, amit még egy picit érdemes alakítanunk:

$$\begin{aligned} \hat{c}^a &\prec \begin{pmatrix} \dot{c}^0 \\ G^i_l (\bar{c}^l - \bar{c}^k \partial_k v^l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c}^0 \\ G^i_l ((c^l - c^0 v^l) - (c^k - c^0 v^k) \partial_k v^l) \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{C}} &:= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{c}^0 \\ \hat{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c}^0 \\ \mathbf{G} \cdot ((\mathbf{c} - c^0 \mathbf{v}) - \nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{c} - c^0 \mathbf{v})) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg, vagyis feltételezzük, hogy maga az anyagi sokaság – másnéven a referencia konfiguráció – a pillanatnyi konfiguráció, akkor térszerű vektorra – amelynek null indexű, azaz időszerű komponense nulla – érdemes külön is felírunk az anyagi időderiváltat, Ekkor formálisan G^i_j identitás (de a deriváltja nem az):

$$\boxed{\hat{c}^i = \dot{c}^i - c^j \partial_j v^i}, \quad \text{azaz} \quad \boxed{\hat{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{c}} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{c}}. \quad (\text{A.37})$$

Ezt szokás a vektor *felsőáramlásos időderiváltjának* nevezni, és $\tilde{\nabla}$ -val jelölni.

Kovektor

Egy kovektormező lokális, szubsztanciális és anyagi alakjai a következők:

$$k_a : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^*, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto k_a(t, \mathbf{r}), \quad (\text{A.38})$$

$$\tilde{k}_a : \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M}^*, \quad \tilde{k}_a = k_a \circ \tilde{x}, \quad (\text{A.39})$$

$$\hat{k}_a : \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M}^*_{A'}, \quad \hat{k}_a = \tilde{Y}_a{}^{c'} \tilde{k}_{c'}. \quad (\text{A.40})$$

Hasonlóan a vektorokhoz, ha az anyag relatív sebességmezője az inerciális megfigyelő szerint \mathbf{v} , akkor megadhatjuk egy inerciális és anyagi megfigyelő szempontjából is. A kovektorok azonban másképp transzformálódnak, mint a vektorok:

$$k_a \prec (k_0 \quad k_i), \quad k_a \succ (\bar{k}_0 \quad k_i) = (k_0 + v^k k_k \quad k_i). \quad (\text{A.41})$$

Ez a felbontás természetesen ismét tükröződik a kovektor anyagi formájának idő és térszerű komponenseiben

$$\hat{k}_a = (\hat{k}_0 \quad \hat{k}_i) = \tilde{Y}_a{}^{c'} \tilde{k}_{c'} \prec \begin{pmatrix} 1 & \tilde{v}^k \\ 0_i & \tilde{H}_i{}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{k}_0 \\ \tilde{k}_k \end{pmatrix} = (\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k \quad \tilde{H}_i{}^k \tilde{k}_k). \quad (\text{A.42})$$

Figyeljük meg, hogy kovektoroknak a térszerű része ugyanaz a különböző megfigyelők számára. Megjegyzendő, hogy a derivált maga is egy kovektor, a szubsztanciális időderivált pedig időszzerű komponensének anyagi alakja. A teljes anyagi derivált pedig a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_a \hat{k}_b &\prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t \\ \tilde{\partial}_i \end{pmatrix} (\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k \quad \tilde{H}_j{}^k \tilde{k}_k) = \begin{pmatrix} (\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k) & (\tilde{H}_j{}^k \tilde{k}_k) \\ \tilde{\partial}_i(\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k) & \tilde{\partial}_i(\tilde{H}_j{}^k \tilde{k}_k) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\tilde{k}}_0 & \tilde{H}_j{}^k (\dot{\tilde{k}}_k + (\partial_k v^l) \tilde{k}_l) \\ \tilde{\partial}_i \tilde{k}_0 & \tilde{H}_j{}^k (\tilde{\partial}_i \tilde{k}_k + \partial_k \tilde{H}_i{}^m \tilde{k}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{k}}_0 & \mathbf{H}(\dot{\mathbf{k}} + (\nabla \mathbf{v})^* \cdot \mathbf{k}) \\ \tilde{\nabla} \tilde{k}_0 & \mathbf{H}(\tilde{\nabla} \mathbf{k} + \nabla \mathbf{H} \cdot \mathbf{k}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Itt a csillag a transzponálást jelöli. Az utolsó egyenlőségénél itt is áttértünk lokális mennyiségekre. Az utolsó mátrixok első sorából olvasható ki az anyagi időderivált:

$$\overset{\diamond}{k}_a = ((k_0 + k_k v^k) \quad H_i{}^k (\dot{k}_k + k_l \partial_k v^l)). \quad (\text{A.43})$$

Ebből kaphatjuk meg a térszerű kovektorra vonatkozó jól ismert alsóáramlásos időderiváltat, ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg ($H_i{}^j$ az identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval):

$$\boxed{\overset{\diamond}{k}_i = ((k_k v^k) \quad \dot{k}_i + k_k \partial_i v^k)}, \quad \text{azaz} \quad \boxed{\overset{\diamond}{\mathbf{k}} = ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{v})}. \quad (\text{A.44})$$

Vagyis térszerű kovektor anyagi időderiváltja általában *nem* térszerű. Nem szorítkozhatunk csak a három dimenzióra. Az anyagi időderivált térszerű részét nevezik *alsóáramlásos deriváltnak*.

Tenzor

Egy tenzormező lokális, szubsztanciális és anyagi formái a következők:

$$T^{ab} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto T^{ab}(t, \mathbf{r}), \quad (\text{A.45})$$

$$\tilde{T}^{ab} : \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}, \quad \tilde{T}^{ab} = T^{ab} \circ \tilde{x}, \quad (\text{A.46})$$

$$\hat{T}^{ab} : \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{M}_A, \quad \hat{T}^{ab} = \tilde{Z}^a{}_c \tilde{Z}^b{}_d \tilde{T}^{cd}. \quad (\text{A.47})$$

Egy tenzormezőnek inerciális megfigyelők által széthasított formáját most nem adjuk meg, helyette majd a referencia konfigurációra visszahúzott, anyagi formából olvasuk ki. Ezt (A.34)–(A.42)-ből láthatóan megtehetjük. A közvetlen érveléshez viszont a téridőmodellek transzformációs formulái szükségesek [201]. Tehát

$$\begin{aligned} \hat{T}^{ab} &= \begin{pmatrix} \hat{t}^0 & \hat{t}^j \\ \hat{t}^i & \hat{t}^{ij} \end{pmatrix} = \tilde{Z}^a{}_c \tilde{Z}^b{}_d \tilde{T}^{cd} = \begin{pmatrix} 1 & 0_l \\ -G^i{}_k v^k & G^i{}_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 & t^m \\ t^l & t^{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -G^j{}_k v^k \\ 0_m & G^j{}_m \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} t^0 & G^j{}_m(t^m - t^0 v^m) \\ G^i{}_l(t^l - v^l t^0) & G^i{}_l G^j{}_m(t^{lm} - t^m v^l - t^l v^m + t^0 v^l v^m) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{t}^0 & G^j{}_m \bar{t}^m \\ G^i{}_l \bar{t}^l & G^i{}_l G^j{}_m \bar{t}^{lm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

A széthasított forma komponenseit az eddigiekhez hasonlóan felülvonással jelöltük. Figyeljük meg, hogy egy tenzormező idő-időszerű része nem változik a különböző megfigyelők szempontjából. A teljes anyagi derivált a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_a(\tilde{Z}^b{}_d \tilde{Z}^c{}_e \tilde{T}^{de}) &\prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t}^0 & \tilde{G}^k{}_m \bar{t}^m \\ \tilde{G}^j{}_l \bar{t}^l & \tilde{G}^j{}_l \tilde{G}^k{}_m \bar{t}^{lm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{t}}^0 & (\tilde{G}^k{}_m \bar{t}^m)^\cdot \\ (\tilde{G}^j{}_l \bar{t}^l)^\cdot & (\tilde{G}^j{}_l \tilde{G}^k{}_m \bar{t}^{lm})^\cdot \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i \bar{t}^0 & \tilde{\partial}_i(\tilde{G}^k{}_m \bar{t}^m) \\ \tilde{\partial}_i(\tilde{G}^j{}_l \bar{t}^l) & \tilde{\partial}_i(\tilde{G}^j{}_l \tilde{G}^k{}_m \bar{t}^{lm}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{t}}^0 & \tilde{G}^k{}_m(\dot{\bar{t}}^m - \partial_r v^m \bar{t}^r) \\ \tilde{G}^j{}_l(\dot{\bar{t}}^l - \partial_r v^l \bar{t}^r) & \tilde{G}^i{}_l \tilde{G}^j{}_m(\dot{\bar{t}}^{lm} - \partial_r v^l \bar{t}^r - \partial_r v^m \bar{t}^l) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i \bar{t}^0 & \tilde{G}^k{}_m(\tilde{\partial}_i \bar{t}^m - \partial_r H^m{}_i \bar{t}^r) \\ \tilde{G}^j{}_l(\tilde{\partial}_i \bar{t}^l - \partial_r H^l{}_i \bar{t}^r) & \tilde{G}^i{}_l \tilde{G}^j{}_m(\tilde{\partial}_i \bar{t}^{lm} - \partial_r H^l{}_i \bar{t}^r - \partial_r H^m{}_i \bar{t}^l) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Az utolsó hipermátrix első komponense az anyagi időderivált. Ezt részletesebben kifejtve kapjuk, hogy

$$\hat{T}^{\diamond ab} = \begin{pmatrix} \dot{\bar{t}}^0 & G^j{}_m((t^m - t^0 v^m)^\cdot - \partial_r v^m(t^r - t_0 v^r)) \\ G^i{}_l \begin{pmatrix} (t^l - t^0 v^l)^\cdot - \\ \partial_r v^l(t^r - t_0 v^r) \end{pmatrix} & G^i{}_l G^j{}_m \begin{pmatrix} (t^{lm} - t^m v^l - t^l v^m + t^0 v^l v^m)^\cdot - \\ \partial_r v^l(t^r - t_0 v^r) - \partial_r v^m(t^l - t_0 v^l) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

A. Objektivitás és téridő

Ebből kaphatjuk meg a térszerű tenzorra vonatkozó jól ismert felsőáramlásos időderiváltat, ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg (azaz G_i^j identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval):

$$\overset{\diamond}{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0^k \\ 0^j & t^{ij} - \partial_r v^i t^{rj} - \partial_r v^j t^{ir} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.50})$$

Vagyis térszerű tenzor anyagi időderiváltja térszerű.

Kotenzor

Egy kotenzormező lokális, szubsztanciális és anyagi formái a következők:

$$B_{ab} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto B_{ab}(t, \mathbf{r}), \quad (\text{A.51})$$

$$\tilde{B}_{ab} : \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*, \quad \tilde{B}_{ab} = B_{ab} \circ \tilde{x}, \quad (\text{A.52})$$

$$\hat{B}_{ab} : \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M}_A^* \otimes \mathbf{M}_A^*, \quad \hat{B}_{ab} = \tilde{Y}_a^c \tilde{Y}_b^d \tilde{B}_{cd}. \quad (\text{A.53})$$

A tenzorok esetéhez hasonlóan most is csak az anyagi formát írjuk fel. Tehát

$$\begin{aligned} \hat{B}_{ab} &= \begin{pmatrix} \hat{b}_0 & \hat{b}_j \\ \hat{b}_i & \hat{b}_{ij} \end{pmatrix} = \tilde{Y}_a^c \tilde{Y}_b^d \tilde{B}_{cd} = \begin{pmatrix} 1 & v^k \\ 0_i & H_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & b_m \\ b_k & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ v^m & H_j^m \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_0 + v^k b_k + b_m v^m + v^k b_{km} v^m & H_j^m (b_m + v^k b_{km}) \\ H_i^k (b_k + v^m b_{km}) & H_i^k H_j^m b_{km} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{b}_0 & H_j^m \bar{b}_m \\ H_i^k \bar{b}_k & H_i^k H_j^m b_{km} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

A széthasított forma komponenseit az eddigiekhez hasonlóan felülvonással jelöltük. Figyeljük meg, hogy egy tenzormező tér-térszerű része az, ami nem változik a különböző megfigyelők szempontjából. A teljes anyagi derivált a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_a (\tilde{Y}_b^d \tilde{Y}_c^e \tilde{B}_{de}) &\prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_0 & \tilde{H}_k^m \bar{b}_m \\ \tilde{H}_j^n \bar{b}_n & \tilde{H}_j^n \tilde{H}_k^m \bar{b}_{nm} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{b}_0 & (\tilde{H}_k^m \bar{b}_m) \\ (\tilde{H}_j^n \bar{b}_n) & (\tilde{H}_j^n \tilde{H}_k^m \bar{b}_{nm}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i \bar{b}_0 & \tilde{\partial}_i (\tilde{H}_k^m \bar{b}_m) \\ \tilde{\partial}_i (\tilde{H}_j^n \bar{b}_n) & \tilde{\partial}_i (\tilde{H}_j^n \tilde{H}_k^m \bar{b}_{nm}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{b}_0 & \tilde{H}_k^m (\dot{\bar{b}}_m + \bar{b}_r \partial_m v^r) \\ \tilde{H}_j^n (\dot{\bar{b}}_n + \bar{b}_r \partial_n v^r) & \tilde{H}_j^n \tilde{H}_k^m (\dot{\bar{b}}_{nm} + \bar{b}_{nr} \partial_m v^r + \partial_n v^s \bar{b}_{sm}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i \bar{b}_0 & \tilde{H}_k^m (\tilde{\partial}_i \bar{b}_m + \partial_m H^r{}_i \bar{b}_r) \\ \tilde{H}_j^n (\tilde{\partial}_i \bar{b}_n + \partial_n H^r{}_i \bar{b}_r) & \tilde{H}_j^n \tilde{H}_k^m (\tilde{\partial}_i \bar{b}_{nm} + \partial_m H^r{}_i \bar{b}_{nr} + \partial_n H^r{}_i \bar{b}_{rm}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Az utolsó hipermátrix első komponense az anyagi időderivált. Ezt részletesebben kifejtve kapjuk, hogy

$$\overset{\diamond}{\hat{B}}_{ab} = \begin{pmatrix} (b_0 + v^k b_k + b_m v^m + v^k b_{km} v^m) & \tilde{H}_j^m ((b_m + v^k b_{km}) + (b_r + v^k b_{kr}) \partial_m v^r) \\ \tilde{H}_i^n ((b_n + v^k b_{kn}) + (b_r + v^k b_{kr}) \partial_n v^r) & \tilde{H}_i^n \tilde{H}_j^m (\dot{b}_{nm} + b_{nr} \partial_m v^r + \partial_n v^s b_{sm}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.56})$$

A térszerű kotenzor anyagi időderiváltja abban az esetben, sem térszerű, ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg (azaz G_i^j identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval), mert:

$$\overset{\diamond}{B}_{ij} = \begin{pmatrix} (v^k v^m b_{km}) & (v^k b_{kj}) + v^k b_{km} \partial_j v^m \\ (v^k b_{ki}) + v^k b_{km} \partial_i v^m & \dot{b}_{ij} + b_{ik} \partial_j v^k + \partial_i v^k b_{kj} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.57})$$

Ennek tér-térszerű komponense a jól ismert háromdimenziós *alsóáramlásos derivált*.

Vegyes tenzor

Egy vegyes tenzormező lokális, szubsztanciális és anyagi formái a következők:

$$A^a_b : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^*, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto A^a_b(t, \mathbf{r}), \quad (\text{A.58})$$

$$\tilde{A}^a_b : \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^*, \quad \tilde{A}^a_b = A^a_b \circ \tilde{x}, \quad (\text{A.59})$$

$$\hat{A}^a_b : \mathbf{M}_A \rightarrow \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{M}_A^*, \quad \hat{A}^a_b = \tilde{Z}^a_c \tilde{Y}_b^d \tilde{A}^c_d. \quad (\text{A.60})$$

Az eddigiekhez hasonlóan most is csak az anyagi formát írjuk fel. Tehát

$$\begin{aligned} \hat{A}^a_b &= \begin{pmatrix} \hat{a}^0 & \hat{a}_j \\ \hat{a}^i & \hat{a}^i_j \end{pmatrix} = \tilde{Z}^a_c \tilde{Y}_b^d \tilde{A}^c_d = \begin{pmatrix} 1 & 0_k \\ -G^i_l v^l & G^i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & b_m \\ b_k & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ v^m & H^m_j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^0 + a_m v^m & H^m_j a_m \\ G^i_l (a^l - a^0 v^l + a^l_m v^m - a_m v^m v^l) & G^i_l H^m_j (a^l_m - a_m v^l) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{a}^0 & H^m_j \bar{a}_m \\ G^i_l \bar{a}^l & G^i_l H^m_j \bar{a}^l_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

A széthasított alak komponenseit most is felülvonással jelöltük. Figyeljük meg, hogy egy vegyes tenzormező idő-térszerű része az, ami nem változik a különböző megfigyelők szempontjából. A teljes anyagi derivált a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_a \hat{A}^d_e &= \tilde{\partial}_a (\tilde{Z}^b_d \tilde{Y}_c^e \tilde{A}^d_e) \prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}^0 & \tilde{H}^m_k \bar{a}_m \\ \tilde{G}^j_l \bar{a}^l & \tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k \bar{a}^l_m \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{a}}^0 & (\tilde{H}^m_k \bar{a}_m) \\ (\tilde{G}^j_l \bar{a}^l) & (\tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k \bar{a}^l_m) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i b_0 & \tilde{\partial}_i (\tilde{H}^m_k \bar{a}_m) \\ \tilde{\partial}_i (\tilde{G}^j_l \bar{a}^l) & \tilde{\partial}_i (\tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k \bar{a}^l_m) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{a}}^0 & \tilde{H}^m_k (\dot{\bar{a}}_m + \bar{a}_r \partial_m v^r) \\ \tilde{G}^j_l (\dot{\bar{a}}^n - \bar{a}^r \partial_r v^l) & \tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k (\dot{\bar{a}}^l_m - \partial_n v^l \bar{a}^n_m + \partial_m v^n \bar{a}^l_n) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i \bar{a}^0 & \tilde{H}^m_k (\tilde{\partial}_i \bar{a}_m + \partial_m H^n_i \bar{a}_n) \\ \tilde{G}^j_l (\tilde{\partial}_i \bar{a}^l - \partial_m H^l_i \bar{a}^m) & \tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k (\tilde{\partial}_i \bar{a}^l_m - \partial_n H^l_i \bar{a}^n_m + \partial_m H^r_i \bar{a}^l_r) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{pmatrix} \quad (\text{A.62})$$

Az utolsó hipermátrix első komponense a vegyes tenzor anyagi időderiváltja. Ezt

A. Objektivitás és téridő

részletesebben kifejtve kapjuk, hogy

$$\overset{\diamond}{A}^a_b = \left(\begin{array}{c} (a^0 + a_m v^m) \\ (a^l - a^0 v^l + a^l_m v^m - \\ a_m v^m v^l) - \\ (a^m - a^0 v^m + a^m_k v^k - \\ a_k v^k v^m) \partial_m v^l \end{array} \right) \tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k \left(\begin{array}{c} \tilde{H}^m_j (\dot{a}_m + a_l \partial_m v^l) \\ (a^l_m - a_m v^l) - \\ \partial_n v^l (a^n_m - a_m v^n) + \\ \partial_m v^n (a^l_n - a_n v^l) \end{array} \right) \tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k. \quad (\text{A.64})$$

A térszerű vegyes tenzor anyagi időderiváltja sem térszerű, akkor sem, ha az anyagot az előbbiekhez hasonlóan az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg (azaz G_i^j, H_i^j identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval), mert:

$$\overset{\diamond}{A}^i_j = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \tilde{G}^i_l ((a^l_m v^m) - a^m_k v^k \partial_m v^l) \\ \tilde{G}^j_l \tilde{H}^m_k (\dot{a}^l_m - \partial_n v^l a^n_m + \partial_m v^n a^l_n) \end{array} \right). \quad (\text{A.65})$$

Ez sem marad térszerű.

Létezésgradiens és sebesség

A kinematikai alapmenyiségünk, a létezésgradiens vegyes tenzor. Anyagi formája viszont megegyezik a szubsztanciális formával, mert $\hat{Y}_b^a = \tilde{Z}^a_c \tilde{Y}_b^d \tilde{Y}_d^c = \tilde{Y}_b^a$. Ennek megfelelően az anyagi formájának deriváltja a szubsztanciális derivált lesz:

$$\tilde{\partial}_a \hat{Y}_c^b = \tilde{\partial}_a \tilde{Y}_c^b \prec \left(\begin{array}{c} \tilde{\partial}_t \\ \tilde{\partial}_i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \tilde{v}^j \\ \tilde{H}^j_k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \tilde{v}^j \\ \tilde{H}^j_k \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 0_i \\ \tilde{\partial}_i \tilde{v}^j \\ \tilde{\partial}_i \tilde{H}^j_k \end{array} \right) \end{array} \right). \quad (\text{A.66})$$

Innen kiolvashatjuk a négyessebesség anyagi deriváltját is. Ebből következik továbbá, hogy a sebesség és a mozgásgradiens anyagi időderiváltja a szubsztanciális derivált.

B. Farkas lemmája és következményei

Ebben a függelékben a Liu-eljárás algebrai részét, a feltételes lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldásához szükséges ismereteket adom meg. A bizonyítások [299]-et követik, ahol részben Farkas és Haar eredeti munkáit [75, 76, 117], részben pedig Liu [188] gondolatmenetét foglalom össze.

B.1. Lemma. (Farkas) Tekintsük az $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, n$ vektorokat a \mathbf{V} véges dimenziós vektortéren, és a vektortér duálisának $S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ részhalmazát. Ekkor a következő állítások ekvivalensek minden $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ -re:

(i) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \geq 0$ minden $\mathbf{p} \in S$ -re.

(ii) Léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nemnegatív egész számok úgy, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i$.

Bizonyítás. (ii) \Rightarrow (i) $\mathbf{p} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i \geq 0$, ha $\mathbf{p} \in S$.

(i) \Rightarrow (ii) Elegendő az állítást $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$ egy maximális, lineárisan független részhalmazára bizonyítani.

Legyen $S_0 = \{\mathbf{y} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_i = 0, i = 1, \dots, l\}$. Ekkor világos, hogy $\emptyset \neq S_0 \subset S$.

Ha $\mathbf{y} \in S_0$, akkor $-\mathbf{y} \in S_0$, ezért $\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} \geq 0$ és $-\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} \geq 0$ egyszerre teljesül. Ezért minden $\mathbf{y} \in S_0$ -re igaz, hogy $\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} = 0$. Vagyis \mathbf{b} az $\{\mathbf{a}_i\}$ által generált lineáris altérben van, tehát vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ valós számok, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{a}_i$.

Továbbá, minden $k \in \{1, \dots, l\}$ esetén van olyan $\mathbf{p}_k \in \mathbf{V}^*$, hogy $\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{a}_k = 1$ és $\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{a}_i = 0$ ha $i \neq k$. Ezért minden $\mathbf{p} \in S$ -re igaz lesz, hogy $0 \leq \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{b} = \mathbf{p}_k \cdot \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{a}_i = \lambda_k$ minden k -ra. Amennyiben a vektorok nem függetlenek, a szorzók választhatóak nullának. ■

Megjegyzés. A következőkben \mathbf{V}^* elemeit *függetlennek változóknak* nevezzük, \mathbf{V}^* -ot a *független változók terének*. A lemma első felében szereplő egyenlőtlenséget *célegyenlőtlenségnek*, a második felében szereplő nemnegatív számokat pedig *Lagrange–Farkas szorzóknak* hívjuk. Az S -t meghatározó egyenlőtlenségek a *kényszerek*.

Konkrét számítások során a Lagrange–Farkas-szorzókat hasonlóan használhatjuk, mint a Lagrange-szorzókat feltételes szélsőérték problémák esetén:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{b} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i \right) \geq 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{V}^*.$$

Az utolsó formából kiolvashatjuk a lemma második állítását.

Megjegyzés. A tétel geometriai értelmezése fontos és szemléletes: ha a \mathbf{b} vektor nem tartozik az \mathbf{a}_i -k által generált kúphoz, akkor van olyan hipersík, amely elválasztja \mathbf{b} -t a kúptól.

Ennek a lemmának az általánosítását először egymástól függetlenül Haar Alfréd és Farkas Gyula közölte egymást követő cikkeként, különböző bizonyításokkal [117, 75]. Jóval később mások több ízben is újra felfedezték és bizonyították, feltehetően függetlenül (pl. [329, 269]).

B.2. Tétel. (Affin Farkas) Legyenek az $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$ vektorok a \mathbf{V} véges dimenziós vektortér elemei, α_i valós számok, $i = 1, \dots, n$, és $S_A = \{\mathbf{p} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i \geq \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$. Ekkor bármely $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ vektorra és β valós számra vonatkozó következő állítások ekvivalensek:

- (i) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \geq \beta$, minden $\mathbf{p} \in S_A$ -ra.
- (ii) Vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nemnegatív valós számok, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i$ és $\beta \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$.

Bizonyítás. (ii) \Rightarrow (i) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{p} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \geq \beta$.

(i) \Rightarrow (ii) Először megmutatjuk, hogy a Farkas-lemma első feltétele a fenti tétel első feltételének következménye, azaz ha (i) igaz, akkor $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \geq 0$, minden $\mathbf{p} \in S$ -re.

Tegyük fel az ellenkezőjét, ekkor van olyan $\mathbf{p}' \in S$, hogy $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{b} < 0$. Vegyünk egy tetszőleges $\mathbf{p} \in S_A$ -t, ekkor $\mathbf{p} + k\mathbf{p}' \in S_A$ minden valós nemnegatív k számra. De ekkor $(\mathbf{p} + k\mathbf{p}') \cdot \mathbf{b} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} + k\mathbf{p}' \cdot \mathbf{b} < \beta$, ha $k < \frac{\beta - \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{b}}$. Tehát ellentmondásra jutottunk.

Ezért, Farkas lemmájának megfelelően, léteznek nemnegatív $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Lagrange–Farkas-szorzók úgy, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i$. Tehát $\beta \leq \inf_{\mathbf{p} \in S_A} \{\mathbf{p} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i\} = \inf_{\mathbf{p} \in S_A} \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$. ■

Megjegyzés (1). A szorzó-forma ismét egy jó emlékeztető:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} - \beta) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i - \alpha_i) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{b} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_i) - \beta + \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i \geq 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{V}^*.$$

Megjegyzés (2). A geometriai interpretáció hasonló az előző tételéhez, de affin objektumokkal. Ha a (\mathbf{b}, β) vonal, azaz egydimenziós (affin) hipersík nem tartozik az (\mathbf{a}_i, α_i) vektorok által generált (affin) kúphoz, akkor létezik egy hipersík, amely elválasztja \mathbf{b} -t a kúptól.

A következő állítás Liu tétele, Farkas lemmájának az a változata (következménye), ahogy a modern termodinamikában felmerült [188]. Egyenlőtlenségek helyett egyenlőség-típusú kényszerek vannak benne, ezért a szorzók lehetnek negatívak is.

B.3. Tétel. (Liu) Legyenek az $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$ vektorok a \mathbf{V} véges dimenziós vektortér elemei, α_i valós számok, $i = 1, \dots, n$, és $S_L = \{\mathbf{p} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i = \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$. Ekkor egy $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ vektorra és β valós számra vonatkozó következő állítások ekvivalensek:

- (i) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \geq \beta$, minden $\mathbf{p} \in S_L$ -re,
- (ii) Vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valós számok, hogy

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i. \tag{B.1}$$

és

$$\beta \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i. \tag{B.2}$$

Bizonyítás. Az állítás az affin Farkas-lemma következménye, mert S_L egyszerűen megadható S_A -nak megfelelő formában \mathbf{a}_i és $-\mathbf{a}_i$ vektorok segítségével: $S_L = \{\mathbf{p} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i \geq \alpha_i, \mathbf{p} \cdot (-\mathbf{a}_i) \geq \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$.

Ezért vannak olyan nemnegatív $\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+$ és $\lambda_1^-, \dots, \lambda_n^-$ valós számok, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^+ \mathbf{a}_i - \lambda_i^- \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i$ és $\beta \leq \sum_{i=1}^n (\lambda_i^+ \alpha_i - \lambda_i^- \alpha_i)$. ■

Megjegyzés (1). A szorzó-forma ismét könnyen megjegyezhetővé teszi az állítást

$$0 \leq (\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} - \beta) - \sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i - \alpha_i) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{b} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbf{a}_i) - \beta + \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{V}^*.$$

Megjegyzés (2). A differenciálható függvények lokális feltételes extremumára vonatkozó Lagrange-szorzos tételben a lineáris algebra fenti tételét alkalmazzuk a megfelelő függvényeknek az extremális pontban történő linearizálása után.

Az alkalmazások szempontjából érdemes Liu tételének vektoros kényszerekkel felírt változatát is kimondani:

B.4. Tétel. (vektor Liu) Legyen $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ a \mathbf{V} és \mathbf{U} véges dimenziós vektorterek $\mathbf{V} \otimes \mathbf{U}$ tenzorszorzatának eleme. Legyen továbbá $\alpha \in \mathbf{U}$ és $S_L = \{\mathbf{p} \in \mathbf{V}^* | \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \alpha\}$. Ekkor egy $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ vektorra és β valós számra vonatkozó következő állítások ekvivalensek:

- (i) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \geq \beta$, minden $\mathbf{p} \in S_L$ -re.
- (ii) Van olyan $\lambda \in \mathbf{U}^*$ kovektor, hogy

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \lambda \tag{B.3}$$

és

$$\beta \leq \lambda \cdot \alpha. \tag{B.4}$$

Bizonyítás. Visszakaphatjuk a tétel előző formáját bármely $\mathbf{K} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}^n$ lineáris bijekció, azaz \mathbf{U} egy koordinátázásának segítségével. Ezért $\mathbf{a}_i := \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{e}_i$, ahol \mathbf{e}_i egységvektor és $\mathbf{K} \cdot \alpha = (\alpha)_i = \alpha_i$. Tehát $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{A} \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{K}^* \mathbf{e}_i$. Ezért létezik a keresett $\lambda \in \mathbf{U}^*$, $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{K}^* \mathbf{e}_i$ és λ független a koordinátázástól. ■

Megjegyzés. A kontinuumfizikában és termodinamikában a fenti algebrai állításokat differenciálegyenletekre és egyenlőtlenségekre alkalmazzuk. A (B.3) egyenlőségeket *Liu-egyenleteknek*, a (B.4) egyenlőtlenséget *disszipációs egyenlőtlenségnek*, független változókat pedig *folyamatirányoknak* nevezzük.

C. Reynolds transzporttétele

Reynolds transzporttétele a paraméteres integrálokra vonatkozó általános tétel egy speciális esete. A kontinuumfizikában az integrális mérlegekről a differenciális mérlegekre történő transzformációra használják. Ebben a dolgozatban használata pont fordított, differenciális mérlegekből következtetünk integrális formákra.

Ha egy áramló közeget jellemző f mezőt a tér egy olyan időtől függő $H(t)$ halmazára integrálunk, amely az áramló közeggel együtt mozog – tehát határán nem lép át a közeget meghatározó fizikai mennyiség (pl. tömeg, vagy energia) –, akkor megfelelő simasági feltételek mellett Reynolds transzporttétele a következő:

$$\frac{d}{dt} \int_{H(t)} f(t, x^i) dV = \int_{H(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} f + f \partial^i v^i \right) dV, \quad (\text{C.1})$$

ahol dV Lebesgue-mértéket jelöl $H(t)$ -n és $v^i(t, x^i)$ a sebességmező. A részletes bizonyítás megtalálható pl. [108]-ban.

D. A mozgó testek hőmérséklete

⁰Ebben a függelékben a relativisztikus termodinamika történetét és a dolgozatban kapott relativisztikus Gibbs-reláció néhány következményét tárgyalom.

D.1. Történet – relativisztikus termodinamika

Ma sincs általánosan elfogadott relativisztikus termodinamika, különböző, egymásnak ellentmondó relativisztikus termodinamikák vannak. Ráadásul nem is két elmélet feszül egymásnak, ahogy esetleg gondolhatnánk, hanem legalább négy álláspont létezik. A paradox helyzet a hőmérséklet transzformációs tulajdonságainak megfogalmazásában jelentkezik legélesebben. A kérdés az, hogy egy adott K_0 vonatkoztatási rendszerben nyugvó termodinamikai test T_0 hőmérsékletét egy hozzá képest egyenletes sebességgel mozgó megfigyelő mekkorának méri (D.1 ábra).

- Planck és Einstein 1907-ben azt állította [260, 69], hogy

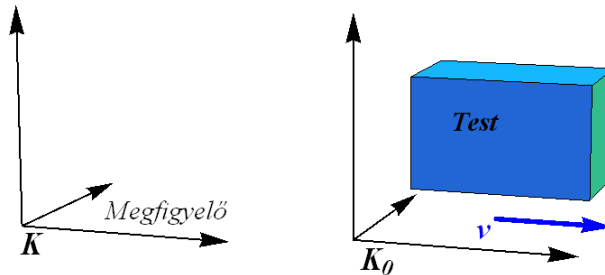
$$T = \frac{T_0}{\gamma}, \quad (\text{D.1})$$

ahol $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Látjuk, hogy $T \leq T_0$, a mozgó test hőmérséklete *kisebbnek* látszik a megfigyelő számára a nyugalmi hőmérsékletnél.

- Heinrich Ott (Sommerfeld tanítványa) 1963-ban egy alapos elemzésben [254] kétségbe vonta Planck és Einstein állítását és arra a következtetésre jutott, hogy a helyes transzformációs képlet a következő

$$T = \gamma T_0, \quad (\text{D.2})$$

⁰ Ez a függelék a [25] közleményen alapul.



D.1. ábra. Relativisztikus termodinamikai test és vonatkoztatási rendszerek

D. A mozgó testek hőmérséklete

azaz $T \geq T_0$, a mozgó test hőmérséklete *nagyobbnak* látszik a megfigyelő számára a nyugalmi hőmérsékleténél.

- Ott még cikkének megjelenése előtt elhunyt, de tőle függetlenül mások is hasonló következtetésre jutottak, így a hamarosan kibontakozó élénk tudományos vitában álláspontja nem maradt védelmező nélkül. Számos új szempont merült fel és 1966-67-ben Peter Landsberg ésszerűen érvel amellett [170, 171], hogy a hőmérséklet nem transzformálódik, azaz

$$T = T_0. \quad (\text{D.3})$$

- Azt gondolhatnánk, hogy okoskodni sokféleképpen lehet, és elvek ide, vagy oda valójában a valóságnak, azaz a méréseknek kell eldönteniük ezt a kérdést. Valódi kísérletek ugyan akkoriban nem voltak lehetségesek, de pontosan ekkor, a hatvanas évek végén megmérték a Föld (Naprendszer) sebességét az akkoriban felfedezett kozmikus háttérsugárzáshoz képest [257]. Ezekben a kísérletekben a feketetest sugárzás Planck-spektruma akkor reprodukálható, ha a hőmérsékletre a következő transzformációs szabályt tételezzük fel:

$$T = \frac{T_0}{\gamma(1 - v \cos \theta)},$$

ahol θ a mozgás és a megfigyelés iránya közötti szög. Ez a Doppler-transzformációs formula. Ezt úgy értelmezhetjük (illetve jóval később többen, többek között a már említett Peter Landsberg 2004-ben [173], úgy értelmezték), hogy nincs értelme transzformációs képletet keresni, a hőmérséklet mérésének módjától, azaz a hőmérőtől függ a hőmérséklet.

- Végül esetenként megjelenik azok véleménye is, akik ehhez a vitához nem szóltak hozzá, mert szerintük komoly tudós nem ártja magát ilyen álproblémákba [233]¹.

Látjuk, hogy tulajdonképpen a lehetséges valamennyi választ megkaptuk (hidegebb, melegebb, egyenlő, értelmetlen, és félreértés az egész). Az a furcsa, hogy mindegyik álláspont védhető, és manapság is számos tanulmány és vizsgálat jelenik meg egyik, vagy másik álláspont védelmében, vagyis úgy tűnik, senki véleménye nem volt elég meggyőző (lásd pl. [266, 53, 61, 340]).

Mi is volt a fő kérdés Planck és Einstein számára? Az újonnan kidolgozott relativitáselmélet fényében a Gibbs-reláció megfelelő formáját keresték egymáshoz képest mozgó inerciális vonatkoztatási rendszerekben. Azaz tegyük fel, hogy termodinamikai testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben

$$dE_0 = T_0 dS_0 - p_0 dV_0, \quad (\text{D.4})$$

¹ Itt Müller Israel-t és Stewart-ot is idézi [135] (Müller rosszul idéz), aki 'imbroglio'-nak, azaz nagyon idegesítő félreértésnek nevezi a relativisztikus termodinamikának ezt a problémáját. Müller érvelése azon alapul, hogy a Gibbs-reláció 'köztudomásúlag' csak egyensúlyban érvényes. Ezzel saját magát keveredik ellentmondásba, ugyanis [235] könyvének legelső formulája az első főtételt a teljes energiára vonatkozóan fogalmazza meg. Innen csak egyetlen lépés, a változók felismerése kell a sebességet is tartalmazó (1.49) Gibbs-reláció felírásához.

ahol E_0 a test energiája, V_0 a térfogata, p_0 a nyomása, S_0 az entrópiája és T_0 a hőmérséklete. Kérdés, hogy a testhez képest mozgó inerciális megfigyelő számára hogyan írható ez fel?

A relativitáselmélet ekkor még nem ismerte a Minkowski-teret (1909), a vizsgálódás fő iránya fizikai mennyiségek vonatkoztatási rendszerektől történő függésének felderítésére a transzformációs tulajdonságok vizsgálata jelentette. Planck elemi megfontolásokkal, illetve tanítványának, von Mosengeilnek munkájára támaszkodva belátta, hogy a nyomás nem transzformálódik, azaz a D.1. ábra vonatkoztatási rendszereiben

$$p = p_0.$$

A térfogat esetében ebben az elrendezésben csak az x irányú Lorentz-kontrakciót vesszük figyelembe, ezért

$$V = \frac{V_0}{\gamma}.$$

Planck többféle gondolatmenettel is demonstrálta, hogy az entrópia nem transzformálódik

$$S = S_0.$$

Egyik legegyszerűbb megfontolása a vonatkoztatási rendszerek egyenértékűségével érvel, illetve feltételezi/felhasználja, hogy az egyik rendszerből adiabatikusan átmozgathatjuk a termodinamikai testet a másikba. Ugyanis tételezzük fel, hogy mondjuk a mozgó megfigyelő rendszerében észlelt entrópia a nagyobb, $S > S_0$. Ezután a testet gyorsítsuk fel adiabatikusan a másik rendszer sebességére. A mozgás adiabatikussága miatt az entrópiák nem változtak. Azonban most már a másik – előzőleg megfigyelő – rendszerben nyugszik a termodinamikai test, ezért ha van különbség a mozgó és álló test entrópiái között, akkor az ellenkező irányú egyenlőtlenség kellene fennálljon $S < S_0$, ami lehetetlen.

Az is világos volt, hogy relativisztikusan az energia nem alapvető mennyiség, egy adott termodinamikai test (vagy tömegpont) energiája a külső megfigyelő számára néha impulzusnak látszik (hasonlóan, ahogy sztatikus elektromos tér mozgó rendszerből mágneses teret is mutat). Azaz, az energia a speciális relativitáselméletben az energiainpulzus-négyesvektor időszerű komponense és csak a megfigyelő számára, az idővel és a térrel együtt, látszik energiának, illetve impulzusnak. Ha egy termodinamikai testnek E_0 az energiája egy nyugvó rendszerben és nincs impulzusa, akkor a hozzá képest v sebességgel mozgó rendszerből úgy tűnik, hogy energiája E és van G impulzusa is. Energia és impulzus ugyanúgy egy négyesvektor részei, mint idő és tér, ezért a különféle nézőpontokat egy Lorentz-transzformáció kapcsolja össze. A D.1 ábrán látható elrendezéssel (a mozgás iránya megegyezik a koordináta-rendszerek x tengelyének irányával) 1+1 dimenzióban írható:

$$\begin{pmatrix} E \\ G \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E_0 \\ \gamma v E_0 \end{pmatrix}.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy energiacseréről a termikus kölcsönhatásban önmagában értelmetlen beszélni: a hőközlés megváltoztatja a termodinamikai test impulzusát is. Ezért Planck bevezette az úgynevezett translációs munkát, és a mozgó vonatkoztatási rendszerben a Gibbs-reláció alakját a következő formában tételezték fel:

$$dE = TdS - pdV + vdG. \quad (D.5)$$

D. A mozgó testek hőmérséklete

Behelyettesítve ebbe a formulába a fenti transzformációs szabályokat, rövid átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\frac{dE_0}{\gamma} = T dS_0 - p_0 \frac{dV_0}{\gamma}.$$

Ez pedig csak akkor egyezik meg a nyugvó rendszerbeli (D.4) alakkal, ha

$$T = \frac{T_0}{\gamma}.$$

Tehát a mozgó test egy megfigyelő számára hidegebbnek tűnik a nyugalmi hőmérsékleténél. Vegyük észre, hogy ekkor a hőmérséklet reciprokára vonatkozóan viszont

$$\frac{1}{T} = \gamma \frac{1}{T_0},$$

azaz a reciprok hőmérséklet egy négyesvektor nulladik komponensének megfelelően transzformálódik, az energiához hasonlóan.

Heinrich Ott többféle gondolkísérlettel elsősorban a hő transzformációs szabályát vizsgálta. Az entrópia és a hőmérséklet fenti transzformációs szabályait figyelembe véve láthatjuk, hogy $\delta Q = T dS = T_0 dS_0 / \gamma = \delta Q_0 / \gamma$, a hő úgy transzformálódik, mint a térfogat. Ott arra a következtetésre jutott, hogy ésszerűbb azt feltételeznünk, hogy a hő maga egy négyesvektor nulladik komponensként fogható fel. Az entrópia invarianciájával ebből már következik a bevezetésben említett transzformációs formula. H. Ott gondolatmenete arra a megfigyelésre épült, hogy a Planck–Einstein-féle relativisztikus termodinamikában impliciten feltételezzük, hogy a hőátadás egy, a megfigyelő vonatkoztatási rendszerében rögzített hőtartály felé történik. Szerinte a hőtartályt sokkal ésszerűbb az együttmozgó rendszerben elképzelni, és akkor a transzlációs munka nem lép fel a Gibbs-relációban.

Ha azonban a hőmérséklet Ott-féle transzformációs szabályát a fenti gondolatmenetben fel szeretnénk használni, akkor azonnal látjuk, hogy a térfogat és a nyomás transzformációs szabályával nem fér össze. Nem érdemes Ott gondolatmenetét részletesen elemezni, számos hiányossága van. Ezeket a hiányosságokat aztán több írás is elemezte az említett vitában.

Néhány fontos érvet érdemes felidézni.

- A termodinamikai testhez rögzített nyugalmi rendszerben mért hőmérséklet a test jellemzője, ezért mindenki számára ugyanaz. Természetesen ez nem feltétlenül azt jelenti, hogy Lorentz-skálár kellene legyen [170, 171, 321, 31].
- A falak és a termodinamikai test összetartásának kérdése is szerepet játszik. Az a kézenfekvő választás, hogy egy adott inerciális vonatkoztatási rendszerben merev falakkal határolt állandó térfogatrész legyen a termodinamikai test, sajátos problémákat okoz. A merevség nem egyeztethető össze a globális, a test egészére fennálló szinkronizáltsággal, a falakon alkalmazott nyomás pedig energiaimpulzus-átadást jelent. Sokak szerint ez az egész probléma lényege [337, 31, 224, 91, 60, 61]. Egyik kiútnak tűnik a munka fogalmának módosítása [156, 31].

- A transzformációs tulajdonságok mások az energiaimpulzussűrűség-tenzor komponenseire és a termodinamikai testet egészében jellemző mennyiségekre. Azaz a sűrűségek és a globális mennyiségek más tenzori rendű mennyiségek. Ez aztán máig zavarokat okoz (lásd pl. [340]).
- A valódi és látszólagos mennyiségek elemi relativisztikus kérdésköre itt egy ravasz csavart vesz, mert ebben az esetben a sebesség nem feltétlenül csak a vonatkoztatási rendszer termodinamikai testhez képest mért relatív sebességét jelentheti. Ugyanis energiaátadás nincs, csak energiaimpulzus-átadás, azaz az impulzus (vagy sebesség?) is a termodinamikai változók között kell szerepeljen. Ezt a kérdést ebben a dolgozatban részletesen vizsgáltuk. Relativisztikus termodinamikában fontosságát van Kampen ismeri fel először [321], de a termodinamikusok relativisztikusan is idegenkednek tőle [31].

Az energiaimpulzus-tenzor, a termodinamikai test határozatlansága és a sebesség mint termodinamikai változó kérdése Planck és Einstein számára 1907-ben nem volt és nem is lehetett világos. Viszont relativisztikus termodinamikai elméletük alapján tűrhetően érteni véljük a kinetikus elméletet és a folyadékelméleteket is (nemdisszipatív esetben legalábbis). Figyelembe véve a kontinuum- és kinetikus elméletből lesűrűsíthető tapasztalatokat, a következő kérdésekre kell választ adni a relativisztikus termodinamikában:

- Mi mozog? Azaz hogyan kell érteni a sebesség fogalmát a termodinamikában. A termodinamikai test részecskéinek, vagy energiájának sebessége számít? Ez a kontinuumok esetén az Eckart-, vagy a Landau–Lifschitz-áramlás, illetve sebesség definíció kérdése.
- Mi a test?
- Hogyan írjuk le mozgó termodinamikai testek kölcsönhatását, termodinamikai egyensúlyát?

Az első két kérdésre a kontinuum elmélet fényében adtam egy értelmezést a 3.6 fejezetben. Az alábbiakban a kölcsönhatásra vonatkozó következményeket tárgyalom.

D.2. Kölcsönható termodinamikai testek

Vegyük észre, hogy a (3.94) nagyon hasonlít a (D.5) Planck–Einstein-képletre. $w_a = Q^a/\mathcal{H}$ sebesség dimenziójú, térszerű vektor: az impulzus osztva a tehetetlenséget kifejező entalpiával. Viszont ez nem egy, a testhez képest mozgó inerciális megfigyelő relatív sebessége, hanem a belső energiaáramának a sebessége: azaz arról van szó, hogy a test sebessége nem feltétlenül az energiájához kötődik, a termodinamikai testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben is van energiaáram, és így impulzusáram is, egyetlen termodinamikai testen belül. Vegyük észre, hogy $\|w^a\| = -w^a w_a = -g^a g_a + 1 < 1$, azaz ez a sebesség sem lépheti túl a fénysebességet. (3.94) általános Gibbs-reláció szerint a termodinamikai test nem egyszerűen energia-impulzust cserél a környezetével – ez felelne meg az Planck–Einstein-formulának –, mert az impulzuscseréhez tartozó termodinamikai „intenzív” változó figyelembe veszi a test tehetetlenségét, azaz entalpiatartalmát. Éppen ezért a transzformációs szabályok megállapításához a két test

D. A mozgó testek hőmérséklete

kölcsönhatásának figyelembe vétele elengedhetetlen, pusztán a Gibbs-reláció vizsgálata nem elegendő.

Írjuk a (3.94) Gibbs-relációt a következő alakba:

$$g_a dE^a = T dS - p dV. \quad (D.6)$$

Tekintsünk két kölcsönható termodinamikai testet, amelyek energia-impulzust cserélhetnek egymással és össztérfogatuk állandó. Ha $dE_1^a + dE_2^a = 0$ és $dV_1 + dV_2 = 0$, akkor az összentrópia maximumának feltételei a megfelelő intenzívek egyenlősége:

$$\frac{g_1^a}{T_1} = \frac{g_2^a}{T_2}, \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \quad (D.7)$$

Ez általában nem jelenti a hőmérsékletek egyenlőségét. A feltétel egyszerű elemzéséhez most egydimenziós mozgásra szorítkozunk. Adott inerciális vonatkoztatási rendszerben ekkor

$$g^a = \hat{u}^a + w^a = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} + \gamma w \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 + vw \\ v + w \end{pmatrix}. \quad (D.8)$$

A termodinamikai egyensúly (D.7) feltétele alapján

$$\frac{\gamma_1(1 + v_1 w_1)}{T_1} = \frac{\gamma_2(1 + v_2 w_2)}{T_2}, \quad \frac{\gamma_1(v_1 + w_1)}{T_1} = \frac{\gamma_2(v_2 + w_2)}{T_2}. \quad (D.9)$$

A két egyenlőség hányadosát képezve kapjuk, hogy egyensúlyban az együttes relativisztikus sebességek egyenlőek:

$$\frac{v_1 + w_1}{1 + v_1 w_1} = \frac{v_2 + w_2}{1 + v_2 w_2}, \quad (D.10)$$

A négyzetük különbségéből pedig következik, hogy

$$\frac{\sqrt{1 - w_1^2}}{T_1} = \frac{\sqrt{1 - w_2^2}}{T_2}. \quad (D.11)$$

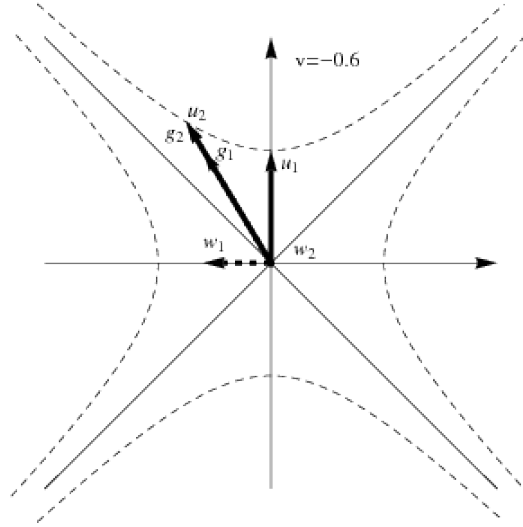
Sebességek egyenlőségére vonatkozó feltételeket termodinamikai megfontolások alapján mások is kaptak [321, 174, 68, 184].

Vegyük észre, hogy a termikus egyensúly feltételében, külső vonatkoztatási rendszerből nézve négy sebesség jelenik meg: v_1 , v_2 , w_1 és w_2 . Egy Lorentz-transzformációval, az egyik testet választva vonatkoztatási rendszernek csak az egyik sebességet tudjuk kiküszöbölni. A maradék három sebesség fizikai feltételt jelent a termodinamikai rendszerre vonatkozóan. Bevezetve a $v = (v_2 - v_1)/(1 - v_1 v_2)$ relatív sebességet, a fenti feltételek a következő formába hozhatóak:

$$w_1 = \frac{v + w_2}{1 + v w_2}, \quad T_1 = T_2 \frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 + v w_2}. \quad (D.12)$$

A hőmérsékletre tehát egy általános Doppler-formulát kaptunk, hasonlóan, mint [51, 172, 173, 35, 223, 56].

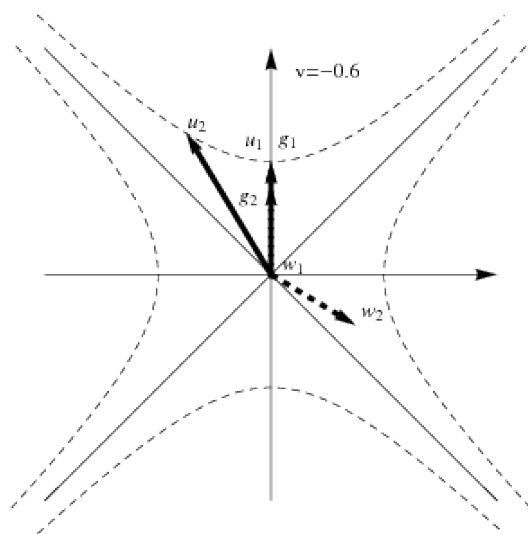
Érdeemes megvizsgálni ezt a formulát a második, megfigyelt termodinamikai test belső energiaáramának sebességére, w_2 -re, vonatkozó különféle feltevések mellett.



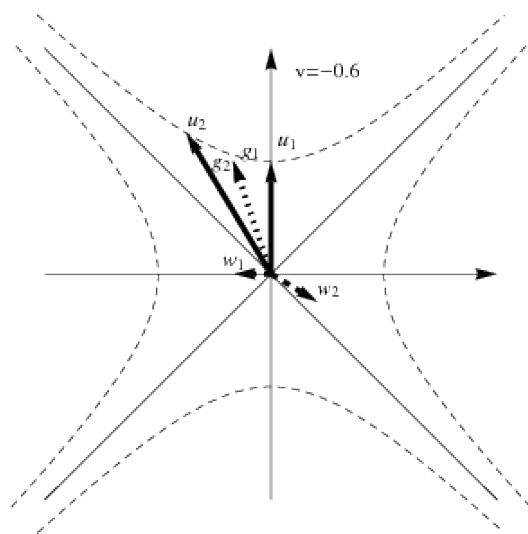
D.2. ábra. A Planck-Einstein transzformációs szabály téridő vektoros szemléltetése. Nincs energiaáram a megfigyelt testben ($w_2^a = 0$), ezért az u_2^a négyessebesség párhuzamos a g_1^a és g_2^a négyesvektorokkal. A hőmérsékletek aránya $T_1/T_2 < 1$.

1. $w_2 = 0$: nincs energiaáram a megfigyelt testben. Ekkor $w_1 = v$, az energiaáram-sebesség megegyezik a test sebességével, és $T_1 = T_2\sqrt{1-v^2} < T_2$. A mozgó test hidegebbnek látszik, mint álló esetben lenne [260, 261, 69] (D.2. ábra).
2. $w_1 = 0$: nincs energiaáram a hőmérőben. Ekkor $w_2 = -v$ és $T_1 = T_2/\sqrt{1-v^2} > T_2$, tehát a mozgó test melegebbnek látszik [26, 254, 285, 266] (D.3. ábra).
3. $w_1 + w_2 = 0$: a teljes rendszerben nincs energiaáram, a két test áramai kompenzálják egymást. Ezt speciális energiaáram-sebességekkel érhetjük el: $w_2 = -w$, $w_1 = w$ és $w = (1 - \sqrt{1-v^2})/v$. Ekkor a látszólagos hőmérsékletek egyenlőek: $T_1 = T_2$ [170, 171] (D.4. ábra).
4. $w_2 = 1$: egy tisztán sugárzást tartalmazó test mozog. Ekkor $w_1 = 1$, és a hőmérsékletekre azt kapjuk, hogy $T_1 = T_2\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$. Tehát $T_1 < T_2$ ha $v > 0$, a távolodó test hőmérséklete Doppler vöröseltolódottnak látszik (D.5. ábra). Ha pedig $T_1 > T_2$, $v < 0$, akkor megkapjuk a közeledő testek Doppler kékeltolódott hőmérsékletét.

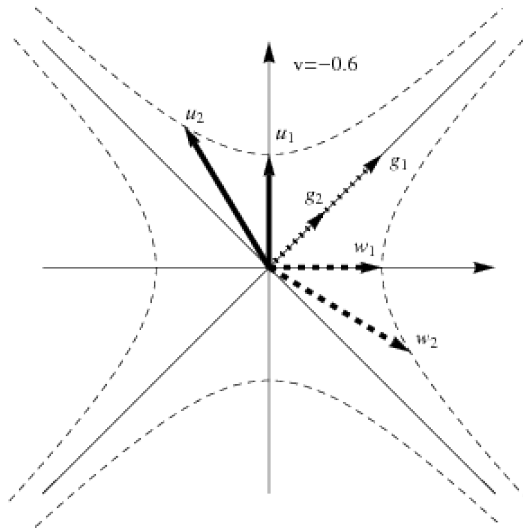
A (D.2)–(D.5) ábrákon a vonatkoztatási rendszert a hőmérőhöz rögzítettük, tehát $u_1^a = (1, 0)$. Az energiaáram térszerű sebességei merőlegesek a megfelelő négyessebességekre, azaz az ábrákon a fénykúpra szimmetrikusan helyezkednek el. A négyessebesség-vektorok végpontjai az időszerű hiperbolákon vannak, a térszerű energiaáram-sebességek pedig belül vannak a térszerű hiperbolákon.



D.3. ábra. A Blauš-Ott transzformációs szabály téridő vektoros szemléltetése. Nincs energiaáram a hőmérőben ($w_1^a = 0$), ezért az u_1^a négyessebesség párhuzamos a g_1^a és g_2^a négyesvektorokkal. A hőmérsékletek aránya $T_1/T_2 > 1$.



D.4. ábra. A Landsberg-szabály téridővektoros szemléltetése. Nincs energiaáram az összetett rendszerben, ezért a g_1^a és g_2^a négyesvektorok egyenlők. A hőmérsékletek aránya $T_1/T_2 = 1$. Itt $w_1 = 0.33$, $w_2 = -0.33$.



D.5. ábra. A Doppler-vörösetolódás két termodinamikai egyensúlyban levő test között. A megfigyelt test energiaáram sebessége a fénysebességgel egyenlő, $w_2 = 1$, ezért $w_1 = 1$ és az energiaimpulzushoz tartozó intenzív mennyiségek, g_1^a és g_2^a fényszerűek.

Irodalomjegyzék

- [1] A. Acharya and T. G. Shawki. Thermodynamic restrictions on constitutive equations for second-deformation-gradient inelastic behaviour. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 43:1751–1772, 1995.
- [2] B. Andresen. *Finite-time Thermodynamics*. University of Copenhagen, Copenhagen, 1983.
- [3] S. I. Anisimov, B. L. Kapeliovich, and T. L. Perelman. Electron emission from metal surfaces exposed to ultrashort laser pulses. *Soviet Physics-JETP*, 39:375–377, 1974.
- [4] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, 1978.
- [5] Asszonyi Cs., szerk., *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 3.*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [6] Asszonyi Cs., Fülöp T., Ván P., Szarka Z. és Horváth R., Reológiai alapmodellek és összekapcsolásuk. In *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai*, szerk. Asszonyi Csaba, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6.*, 2. fejezet, 51–92. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [7] Asszonyi Cs. és Kapolyi L., *A bányászat mechanikai rendszere, 2. Kőzetkontinuumok mechanikája*. Veszprémi Akadémiai Bizottság, Veszprém, 1981.
- [8] Cs. Asszonyi and R. Richter. *The Continuum Theory of Rock Mechanics*. Trans. Tech. Publications, USA, 1979.
- [9] Asszonyi Cs., Szarka Z., Csatár A., Horváth R., Kocsis D. és Ván P., Tömör anyagok képlékeny deformációjáról. In *A képlékenység termodinamikájáról*, szerk. Asszonyi Cs., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 13.*, 1. fejezet, 9–21. o. Hungarian Printing House, Budapest, 2012.
- [10] Asszonyi Cs., Szarka Z. és Béda Gy., Körszelvényű földalatti folyosók körül kialakuló mechanikai mezők. In *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról*, szerk. Asszonyi Cs., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9.*, 115–171. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.
- [11] Asszonyi Cs. Ván P. és Szarka Z. *Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5.* Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007.
- [12] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets, and M. A. Stephanov. Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography. *Journal of High Energy Physics*, (4):100, 2008.

- [13] R. Baier, P. Romatschke, and U. A. Wiedemann. Dissipative hydrodynamics and heavy-ion collisions. *Physical Review C*, 73:064903, 2006.
- [14] S. Bargmann and P. Steinmann. Classical results for a non-classical theory: remarks on thermodynamic relations in Green–Naghdi thermo-hyperelasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 19:59–66, 2007.
- [15] S. Bargmann and P. Steinmann. Modeling and simulation of first and second sound in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 45:6067–6073, 2008.
- [16] Béda, J. Kozák, I. and Verhás J., *Continuum Mechanics*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1995.
- [17] A. Bejan. Entropy generation minimization: The new thermodynamics of finite-size devices and finite-time processes. *Applied Physics Reviews*, 79(3):1191–1218, 1996.
- [18] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and M. Berezovski. Waves in microstructured solids: a unified viewpoint of modelling. *Acta Mechanica*, 220:349–363, 2011.
- [19] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and G. A. Maugin. Generalized thermomechanics with dual internal variables. *Archive of Applied Mechanics*, 81(2):229–240, 2010.
- [20] A. Bertram and B. Svendsen. On material objectivity and reduced constitutive equations. *Archive of Mechanics*, 53:653–675, 2001.
- [21] B. Betz, G.S. Denicol, T. Koide, E. Molnár, H. Niemi, and D. H. Rischke. Second order dissipative fluid dynamics from kinetic theory. *EPJ Web of Conferences*, 13:07005, 2011.
- [22] B. Betz, D. Henkel, and D. H. Rischke. Complete second-order dissipative fluid dynamics. *Journal of Physics G*, 36:064029, 2009.
- [23] I. Bialynicki-Birula and J. Mycielski. Nonlinear wave mechanics. *Annals of Physics*, 100:62–93, 1976.
- [24] Byron R. Bird, R. C. Armstrong, and Ole Hassager. *Dynamics of polymeric liquids*. John Wiley and Sons, Inc., New York-Santa Barbara-etc., 1977.
- [25] Biró T. S. and P. Ván. Zeroth Law compatibility of non-additive thermodynamics. *Physical Review E*, 83:061147, 2011.
- [26] D. Blanuša. Sur les paradoxes de la notion d’énergie. *Glasnik mat. fiz.; astr.*, 2(4-5):249–50, 1947.
- [27] D. Bohm. *Quantum Theory*. Prentice-Hall, New York, 1951.
- [28] Bojtár I., Vásárhelyi B. és Asszonyi Cs. A Young-féle rugalmassági modulus és a Poisson-tényező. In *Új eredmények a kontinuumfizikában*, szerk. Fülöp T., *Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár 8.*, 4. fejezet, 101–120. o. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

- [29] T. J. Bright and Z. M. Zhang. Common misperceptions of the hyperbolic heat equation. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 23(3):601–607, 2009.
- [30] D.G. Cahill, W. K. Ford, K. E. Goodson, G. D. Mahan, A. Majumdar, H. J. Maris, R. Merlin, and S. R. Phillpot. Nanoscale thermal transport. *Journal of Applied Physics*, 93(2):793–818, 2003.
- [31] H. Callen and G. Horwitz. Relativistic thermodynamics. *American Journal of Physics*, 39(8):938–947, 1971.
- [32] H. B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley and Sons NY, New York, etc., 2nd edition, 1985.
- [33] G. Capriz. Continua with latent microstructure. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 90(1):43–56, 1985.
- [34] C. Carathéodory. Grundlagen der Thermodynamik. *Mathematische Annalen*, 67:355–386, 1909.
- [35] J. Casas-Vázquez and D. Jou. Temperature in non-equilibrium states. *Reports on Progress in Physics*, 66:1937–2023, 2003.
- [36] H. G. B. Casimir. On Onsager’s principle of microscopic reversibility. *Reviews of Modern Physics*, 17:343–350, 1945.
- [37] C. Cattaneo. Sulla conduzione del calore. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 3:83–101, 1948.
- [38] Csernai L. P., *Introduction to relativistic heavy ion physics*. John Wiley and Sons, Chicester-etc., 1994.
- [39] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - Oxford, 2nd, revised edition, 1982.
- [40] V. Ciano, V. A. Cimmelli, and P. Ván. On the evolution of higher order fluxes in non-equilibrium thermodynamics. *Mathematical and Computer Modelling*, 45:126–136, 2007.
- [41] V. A. Cimmelli. Different thermodynamic theories and different heat conduction laws. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 34(4):299–332, 2009.
- [42] V. A. Cimmelli. Weakly nonlocal thermodynamics of anisotropic rigid heat conductors revisited. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 36(3):285–309, 2011.
- [43] V. A. Cimmelli, A. Sellitto, and D. Jou. Nonlocal effects and second sound in a nonequilibrium steady state. *Physical Review B*, 79:014303, 2009.
- [44] V. A. Cimmelli, A. Sellitto, and D. Jou. Nonlinear evolution and stability of the heat flow in nanosystems: Beyond linear phonon hydrodynamics. *Physical Review B*, 82:184302, 2010.

- [45] V. A. Cimmelli and P. Ván. The effects of nonlocality on the evolution of higher order fluxes in non-equilibrium thermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 46(11):112901–15, 2005.
- [46] B. D. Coleman and M. E. Gurtin. Thermodynamics with internal state variables. *The Journal of Chemical Physics*, 47(2):597–613, 1967.
- [47] B. D. Coleman and V. J. Mizel. Existence of caloric equation of state in thermodynamics. *Journal of Chemical Physics*, 40:1116–1125, 1964.
- [48] B. D. Coleman and V. J. Mizel. Existence of entropy as a consequence of asymptotic stability. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 25:243–270, 1967.
- [49] B. D. Coleman and W. Noll. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13:167–178, 1963.
- [50] E. Cosserat and Cosserat F. *Théorie des Corps Déformables*. Hermann and Fils, Paris, 1909.
- [51] S. S. Costa and G. E. A. Matsas. Temperature and relativity. *Physics Letters A*, 209:155–159, 1995.
- [52] N. D. Cristescu. Rock rheology. In E. T. Brown, editor, *Comprehensive Rock Engineering I. Fundamentals*, pages 523–544. Pergamon Press, Oxford-etc., 1993.
- [53] D. Cubero, J. Casado-Pascual, J. Dunkel, P. Talkner, and P. Hänggi. Thermal equilibrium and statistical thermometers in special relativity. *Physical Review Letters*, 99:170601, 2007.
- [54] F. L. Curzon and B. Ahlborn. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. *American Journal of Physics*, 43:22–24, 1975.
- [55] P. Danielewicz and M. Gyulassy. Dissipative phenomena in quark gluon plasma. *Physical Review D*, 31(1):53–62, 1985.
- [56] Marek Demiański. *Relativistic astrophysics*. PWN-Polish Scientific Publishers - Pergamon Press, Warszawa - Oxford, etc., 1985.
- [57] M. Dobróka. On a generalized Poynting-thomson model. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungarica*, 18(3):281–290, 1983.
- [58] W. Dreyer and H. Struchtrup. Heat pulse experiments revisited. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 5:3–50, 1993.
- [59] R. Drouot and G. A. Maugin. Application of diffusive internal variables in complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Mechanics*, 96:31–43, 2001.
- [60] J. Dunkel and P. Hänggi. Relativistic Brownian motion. *Physics Reports*, 471(1):1–73, 2009.

- [61] J. Dunkel, P. Hänggi, and S. Hilbert. Nonlocal observables and lightcone-averaging in relativistic thermodynamics. *Nature Physics*, 5(10):741–747, 2009.
- [62] J. E. Dunn and R.L. Fosdick. Thermodynamics, stability, and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 56:191–252, 1974.
- [63] J. E. Dunn and J. Serrin. On the thermomechanics of interstitial working. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 88:95–133, 1985.
- [64] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes, I. The simple fluid. *Physical Review*, 58:267–269, 1940.
- [65] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes, II. Fluid mixtures. *Physical Review*, 58:269–275, 1940.
- [66] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes, III. Relativistic theory of the simple fluid. *Physical Review*, 58:919–924, 1940.
- [67] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 73(4):373–382, 1948.
- [68] D. Eimerl. On relativistic thermodynamics. *Annals of Physics*, 91:481–498, 1975.
- [69] A. Einstein. Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4:411–462, 1907.
- [70] J. Engelbrecht and M. Vendelin. Microstructure described by hierarchical internal variables. *Rendiconti del Seminario Matematico, Università e Politecnico di Torino*, 58(1):93–98, 2000.
- [71] J. Engelbrecht. *Nonlinear wave mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1997.
- [72] C. Eringen. *Microcontinuum Field Theories I. Foundations and Solids*. Springer-Verlag, Berlin-etc., 3th edition, 1999.
- [73] M. Fabrizio and A. Morro. Thermodynamics and second sound in a two-fluid model of helium II; Revisited. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 28:69–84, 2003.
- [74] Gy. Farkas. A Carnot-Clausius tétel egyszerűsített levezetése. *Mathematikai és Fizikai Lapok*, 7–11, 1895.
- [75] Gy. Farkas. Egyenlőtlenség alkalmazásának új módjai. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 36:297–308, 1918.
- [76] Gy. Farkas. A lineáris egyenlőtlenség következményei. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 36:397–408, 1918.
- [77] Fényes I., *A termodinamika alapjai*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

- [78] Fényes I., *Termosztatika és termodinamika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
- [79] G. Fichera. Is the Fourier theory of heat propagation paradoxical? *Rediconti del Circolo Matematico di Palermo*, XLI:5–28, 1992.
- [80] J. Fourier. *Analytical theory of heat*. Dover, New York, 1955.
- [81] M. Frewer. More clarity on the concept of material frame-indifference on classical continuum mechanics. *Acta Mechanica*, 202:213–246, 2009.
- [82] M. Friedman. *Foundations of Space-Time Theories (Relativistic Physics and Philosophy of Science)*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983.
- [83] M. Fujii, X. Zhang, H. Xie, H. Ago, K. Takahashi, and T. Ikuta. Measuring the thermal conductivity of a single carbon nanotube. *Physical Review Letters*, 95:065502, 2005.
- [84] J. G. Fujimoto, J. M. Liu, and E. P. Ippen. Femtosecond laser interaction with metallic tungsten and nonequilibrium electron and lattice temperatures. *Soviet Physics-JETP*, 53:1837–40, 1984.
- [85] Fülöp T., Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. In *Új eredmények a kontinuumfizikában*, szerk. Fülöp T., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8.*, 3. fejezet, 55–99. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [86] Fülöp T., Reológiai elemkapcsolások. In *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonosságai*, szerk. Asszonyi Cs., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6.*, 3. fejezet, 93–120. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [87] Fülöp T., A tér nem abszolút - a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye. In *Új eredmények a kontinuumfizikában*, szerk. Fülöp T., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6.*, 1. fejezet, 11–35. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [88] Fülöp T. és Béda Gy., Hidrosztatikus környezetben nyitott hengerszimmetrikus alagút körüli reológiai időfüggés. In *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról*, szerk. Asszonyi Cs., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9.*, 99–114. o. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.
- [89] Fülöp T. és Ván P., Véges rugalmas és képlékeny deformációk leírása. In *Idő és térderiváltak anyagtörvényekben*, szerk. Fülöp T. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10.*, 99–151. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.
- [90] T. Fülöp and P. Ván. Kinematic quantities of finite elastic and plastic deformations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35:1825–1842, 2012. arXiv:1007.2892v1.
- [91] Gábos Z., *Termodinamika, Fenomenológiai rész*. Az Erdélyi Múzeum-egyesület kiadása, Kolozsvár, 1996.

- [92] G. P. Galdi. Slow steady fall of rigid bodies in a second-grade fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 90(1):373–381, 2001.
- [93] L. S. García-Colín and A. Sandoval-Villalbazo. Relativistic non-equilibrium thermodynamics revisited. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 31:11–22, 2006.
- [94] A. L. Garcia-Perciante, L. S. Garcia-Colin, and A. Sandoval-Villalbazo. On the nature of the so-called generic instabilities in dissipative relativistic hydrodynamics. *General Relativity and Gravitation*, 41(7):1645–1654, 2009.
- [95] R. Geroch. Relativistic theories of dissipative fluids. *Journal of Mathematical Physics*, 36(8):4226–4241, 1995.
- [96] R. Geroch. On hyperbolic "theories" of relativistic dissipative fluids. 2001. arXiv:gr-qc/0103112.
- [97] R. Geroch and L. Lindblom. Dissipative relativistic fluid theories of divergence type. *Physical Review D*, 41:1855–1861, 1990.
- [98] R. Geroch and L. Lindblom. Causal theories of dissipative relativistic fluids. *Annals of Physics*, 207:394–416, 1991.
- [99] M. A. Goodman and S. C. Cowin. Two problems in the gravity flow of granular materials. *Journal of fluid Mechanics*, 45/2:321–339, 1971.
- [100] A.E. Green and P. M. Naghdi. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proceedings of the Royal Society: Mathematical and Physical Sciences*, 432(1885):171–194, 1991.
- [101] M. Grmela, G. Lebon, and C. Dubois. Multiscale thermodynamics and mechanics of heat. *Physical Review E*, 83:061134, 2011.
- [102] M. Grmela and H. C. Öttinger. Dynamics and thermodynamics of complex fluids. I. Development of a general formalism. *Physical Review E*, 56(6):6620–6632, 1997.
- [103] S. R. de Groot. *Thermodynamics of irreversible processes*. North Holland, 1959.
- [104] S. R. de Groot and P. Mazur. *Non-equilibrium Thermodynamics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962.
- [105] S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen, and Ch. G. van Weert. *Relativistic Kinetic Theory*. North Holland, Amsterdam, 1980.
- [106] M. E. Gurtin. Thermodynamics and the possibility of spatial interaction in elastic materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 19:339–352, 1965.
- [107] M. E. Gurtin. On a framework for small-deformation viscoplasticity: free energy, microforces, strain gradients. *International Journal of Plasticity*, 19:47–90, 2003.

- [108] M. E. Gurtin, E. Fried, and L. Anand. *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge University Press, 2010.
- [109] M. G. Gurtin. Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance. *Physica D*, 92:178–192, 1996.
- [110] R. A. Guyer and J. A. Krumhansl. Solution of the linearized phonon Boltzmann equation. *Physical Review*, 148(2):766–778, 1966.
- [111] R. A. Guyer and J. A. Krumhansl. Thermal conductivity, second sound and phonon hydrodynamic phenomena in nonmetallic crystals. *Physical Review*, 148(2):778–788, 1966.
- [112] I. Gyarmati. On the phenomenological basis of irreversible thermodynamics. *Periodica Polytechnica Ser. Chem. Engng. Budapest*, 5:219–243, 321–339, 1961.
- [113] Gyarmati I., *Nemegyensúlyi termodinamika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.
- [114] I. Gyarmati. *Non-equilibrium Thermodynamics /Field Theory and Variational Principles/*. Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [115] I. Gyarmati. The wave approach of thermodynamics and some problems of non-linear theories. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 2:233–260, 1977.
- [116] E.P. Gyftopoulos. Infinite time (reversible) versus finite time (irreversible) thermodynamics: a misconceived distinction. *Energy*, 24:1035–1039, 1999.
- [117] A. Haar. A lineáris egyenlőtlenségekről. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 36:279–296, 1918.
- [118] Harmatha A., *Termodinamika műszakiaknak*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.
- [119] R. A. Hauser and N. P. Kirchner. A historical note on the entropy principle of Müller and Liu. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 14:223–226, 2002.
- [120] W. A. Hiscock. Generic instabilities in first-order relativistic fluid theories. II. Havas-Swenson-type theories. *Physical Review D*, 86(6):1527–1532, 1986.
- [121] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Stability and causality in dissipative relativistic fluids. *Annals of Physics*, 151:466–496, 1983.
- [122] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories. *Physical Review D*, 31(4):725–733, 1985.
- [123] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Linear plane waves in dissipative relativistic fluids. *Physical Review D*, 35(12):3723–3731, 1987.
- [124] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Stability in dissipative relativistic fluid theories. *Contemporary Mathematics*, 71:181–220, 1988.

- [125] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin. Theory of dynamic critical phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 49(3):435–479, 1977.
- [126] P. R. Holland. *The Quantum Theory of Motion*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [127] J. M. Honig. *Thermodynamics*. Academic Press, San Diego, etc., 2 edition, 1999.
- [128] Horváth R., A mozgási energia fogalmának egy új értelmezése. *KLTE MFK Tudományos Közleményei*, 23:29–33, 1997.
- [129] H. S. Hsieh. *Principles of thermodynamics*. McGraw-Hill Book Company, New York, et. al., 1975.
- [130] W. Isaacson. *Einstein*. Simon and Schuster, 2007.
- [131] W. Israel. Nonstationary irreversible thermodynamics - causal relativistic theory. *Annals of Physics*, 100(1-2):310–331, 1976.
- [132] W. Israel and J. M. Stewart. Thermodynamics of nonstationary and transient effect in a relativistic gas. *Physics Letters A*, 58(4):213–215, 1976.
- [133] W. Israel and J. M. Stewart. On transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. *Annals of Physics*, 118:341–372, 1979.
- [134] W. Israel and J. M. Stewart. On transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. II. *Proceedings of Royal Society London A*, 365:43–52, 1979.
- [135] W. Israel and J. M. Stewart. Progress in relativistic thermodynamics and electrodynamics of continuous media. In A. Helde, editor, *General relativity and gravitation (One hundred years after the birth of Albert Einstein)*, volume 2, chapter 13, pages 491–525. Plenum Press, New York and London, 1980.
- [136] T. Jacobson. Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State, *Physical Review Letters*, 75:1260-3, 1995.
- [137] G. Jaumann. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (I. Mitteilung). *Sitzungsberichte der kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien*, CXVII(Mathematisch IIa):385–528, 1911.
- [138] L. Jánossy and M. Ziegler. The hydrodynamical model of wave mechanics I., (The motion of a single particle in a potential field). *Acta Physica Hungarica*, 16(1):37–47, 1963.
- [139] L. Jánossy and M. Ziegler-Náray. The hydrodynamical model of wave mechanics II., (The motion of a single particle in an external electromagnetic field). *Acta Physica Hungarica*, 16(4):345–353, 1964.
- [140] L. Jánossy and M. Ziegler-Náray. The hydrodynamical model of wave mechanics III., (Electron spin). *Acta Physica Hungarica*, 20:233–249, 1966.

- [141] L. Jánossy. The hydrodynamical model of wave mechanics, (The many body problem). *Acta Physica Hungarica*, 27:35–46, 1969.
- [142] L. Jánossy. On the physical significance of the vector potential. *Acta Physica Hungarica*, 29(4):419–425, 1970.
- [143] L. Jánossy. The hydrodynamical model of wave mechanics VII., (The Stern-Gerlach effect of the H-atom). *Acta Physica Hungarica*, 30(2):131–137, 1971.
- [144] L. Jánossy. The hydrodynamical model of wave mechanics VIII., (Some limitations of the one body treatment). *Acta Physica Hungarica*, 30(2):139–143, 1971.
- [145] L. Jánossy. The physical interpretation of wave mechanics I. *Foundations of Physics*, 3(2):185–202, 1973.
- [146] L. Jánossy. The hydrodynamical model of wave mechanics IX., (The self interaction of a system). *Acta Physica Hungarica*, 35(1-4):141–153, 1974.
- [147] L. Jánossy. Wave mechanics and the photon. *Acta Physica Hungarica*, 39(2):109–121, 1975.
- [148] L. Jánossy. Wave mechanics and the photon II. *Acta Physica Hungarica*, 41(2):71–78, 1976.
- [149] L. Jánossy and M. Ziegler-Náray. Wave mechanics and the photon III. (formulation of the simultaneous equations). *Acta Physica Hungarica*, 43(2):173–183, 1977.
- [150] L. Jánossy and M. Ziegler-Náray. Wave mechanics and the photon IV. *Acta Physica Hungarica*, 43(2):173–183, 1977.
- [151] D. D. Joseph and L. Preziosi. Heat waves. *Reviews of Modern Physics*, 61:41–73, 1989.
- [152] D. D. Joseph and L. Preziosi. Addendum to the paper "Heat waves". *Reviews of Modern Physics*, 62:375–391, 1990.
- [153] D.D. Joseph. Instability of the rest state of fluids of arbitrary grade greater than one. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 75:251–256, 1981.
- [154] D. Jou, J. Casas-Vázquez, and G. Lebon. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer Verlag, Berlin-etc., 3rd, revised edition, 2001.
- [155] J. Kestin. Internal variables in the local-equilibrium approximation. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 18:360–379, 1993.
- [156] T.W.B. Kibble. Relativistic transformation laws for temperature variables. *Il Nuovo Cimento*, XLI(1):72–78, 1966.
- [157] P. Kim, L. Shi, A. Majumdar, and P. L. McEuen. Thermal transport measurements of individual multiwalled nanotubes. *Physical Review Letters*, 87(21):215502, 2001.

- [158] N. P. Kirchner and K. Hutter. Elasto-plastic behaviour of a granular material with and additional scalar degree of freedom. In W. Ehlers and J. Blum, editors, *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*, pages 147–168. Springer, 2002.
- [159] M.J. Klein. Thermodynamics in Einstein’s thought. *Science, New Series*, 157(3788):509–516, 1967.
- [160] G. A. Korn and T. M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Dover, 2nd, revised edition, 2000.
- [161] D. J. Korteweg. Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l’on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité. *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, Series II*, 6:1–16, 1901.
- [162] P. Kostädt and M. Liu. On the causality and stability of the relativistic diffusion equation. *Physical Reviews D*, 62:023003, 2000.
- [163] M. D. Kostin. On the Schrödinger-Langevin equation. *The Journal of Chemical Physics*, 57(9):3589–3590, 1972.
- [164] G. D. C. Kuiken. *Thermodynamics of Irreversible Processes (Applications to Diffusion and Rheology)*. John Wiley and Sons, Chicester-etc., 1994.
- [165] Lámer G., Solid and soft body with and without structure. In Bagi K., editor, *Quasi-static deformations of particular materials. Proceedings of QuaDMP’03 Workshop*, pages 159–166, Budapest, 2003. Publ. Comp. of BUTE.
- [166] Lámer G., Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének kinematikai kérdései. In *Mérnökgeológia és Kőzetmechanika*, szerk. Török Á. és Vásárhelyi B. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 2*, 145–156. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [167] Lámer G., Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének dinamikai kérdései. In *Mérnökgeológia és Kőzetmechanika*, szerk. Török Á. és Vásárhelyi B. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 4*. 301–314. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007.
- [168] L. D. Landau and I. M. Khalatnikov. Ob anomal’nom pogloszhenii zvuka vblizi tochek fazovo perekhoda vtorovo roda. *Doklady Akademii Nauk, SSSR*, 96:469, 1954. English translation: On the anomalous absorption of sound near a second order transition point. in: Collected papers of L. D. Landau, ed. D. ter Haar, (Pergamon, Oxford, 1965), pp. 626-633.
- [169] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, London, 1959.
- [170] P. Landsberg. Does a moving body appears cool? *Nature*, 212:571–573, 1966.
- [171] P. Landsberg. Does a moving body appears cool? *Nature*, 214:903–904, 1967.

- [172] P. Landsberg and G. E. A. Matsas. Laying the ghost of the relativistic temperature transformation. *Physics Letters A*, 223:401–403, 1996.
- [173] P. Landsberg and G. E. A. Matsas. The impossibility of a universal relativistic temperature transformation. *Physica A*, 340:92–94, 2004.
- [174] P. T. Landsberg. *Thermodynamics and Statistical mechanics*. Oxford Clarendon Press, Oxford, 1978.
- [175] R. G. Larson. *Constitutive equations for polymer melts*. Butterworths, Boston-etc., 1988.
- [176] B. H. Lavenda. *A new perspective of thermodynamics*. Springer, New York, et. al., 2010.
- [177] G. Lebon, D. Jou, J. Casas-Vázquez, and W. Muschik. Weakly nonlocal and nonlinear heat transport in rigid solids. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 23:176–191, 1998.
- [178] J. L. Lebowitz. Microscopic origins of irreversible macroscopic behavior. *Physica A*, 263:516–527, 1999.
- [179] J. C. M. Li. Persistency, pseudo-entropy and thermokinetic potential. *Physical Review*, 127:1784–1786, 1962.
- [180] R. L. Liboff. *Kinetic Theory (Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions)*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.
- [181] Lin, W. and et al., A case study of 3D stress orientation determination in Shikoku Island and Kii Peninsula, Japan, in *Rock Engineering in Difficult Ground Conditions (Soft Rock and Karst)*, ed. Ivan Vrkljan, Balkema, London, pages=277-282, (Proceedings of Eurock’09 Cavtat, Croatia, 2009 X. 28-29), 2010.
- [182] L. Lindblom. The relaxation effect in dissipative relativistic fluid theories. *Annals of Physics*, 247:1–18, 1996.
- [183] L. Lindblom and W. A. Hiscock. On the stability of rotating stellar models in general relativity theory. *The Astrophysical Journal*, 267:384–401, 1983.
- [184] Chuang Liu. Is there a relativistic thermodynamics? A a case study of the meaning for special relativity. *Studies in History and Philosophy of Science*, 25(6):983–1004, 1994.
- [185] I-S. Liu. On Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 16:177–183, 2003.
- [186] I-S. Liu. Further remarks on Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:125–133, 2005.
- [187] I-S. Liu, I. Müller, and T. Ruggeri. Relativistic thermodynamics of gases. *Annals of Physics*, 169:191–219, 1986.

- [188] I-Shih Liu. Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 46:131–148, 1972.
- [189] I-Shih Liu. Entropy flux relation for viscoelastic bodies. *Journal of Elasticity*, 90(3):259–270, 2007.
- [190] I-Shih Liu. Entropy flux relation for viscoelastic bodies. *Journal of Elasticity*, 90(3):259–270, 2008.
- [191] I-Shih Liu. Constitutive theory for anisotropic heat conductors. *Journal of Mathematical Physics*, 50:083506, 2009.
- [192] I-Shih Liu and I. Müller. On the thermodynamics and thermostatics of fluids in electromagnetic fields. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 46(2):149–176, 1972.
- [193] Shang-Keng Ma. *Statistical mechanics*. World Scientific, Philadelphia-Singapore, 1985. trans. M. K. Fung (from Chinese).
- [194] S. Machlup and L. Onsager. Fluctuations and irreversible processes. II. Systems with kinetic energy. *Physical Review*, 91(6):1512–1515, 1953.
- [195] E. Madelung. Quantentheorie in hydrodynamischer Form. *Zeitschrift für Physik*, 40:322–326, 1926.
- [196] P. M. Mariano. Multifield theories in mechanics of solids. *Advances in Applied Mechanics*, 38:1–94, 2002.
- [197] P. M. Mariano. $SO(3)$ invariance and covariance in mixtures of simple bodies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40:1023–1030, 2005.
- [198] T. Matolcsi. *A Concept of Mathematical Physics: Models for SpaceTime*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.
- [199] T. Matolcsi. Dynamical laws in thermodynamics. *Physics Essays*, 5(3):320–327, 1992.
- [200] T. Matolcsi. The interaction of bodies in thermodynamics. *Physics Essays*, 6(2):158–165, 1993.
- [201] T. Matolcsi. *Spacetime Without Reference Frames*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993.
- [202] T. Matolcsi. Reservoirs in thermodynamics. *Physics Essays*, 8(3):234–239, 1995.
- [203] T. Matolcsi. On the classification of phase transitions. *ZAMP*, 47(6):837–857, 1996.
- [204] T. Matolcsi. On the dynamics of phase transitions. *ZAMP*, 47(6):858–879, 1996.
- [205] T. Matolcsi. Dynamics of phase transitions. *Periodica Polytechnica, Ser. Chem Eng.*, 42(1):15–19, 1998.

- [206] T. Matolcsi. On the mathematical structure of thermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 41(4):2021–2042, 2000.
- [207] T. Matolcsi. *Ordinary thermodynamics*. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 2005.
- [208] Matolcsi T., *Közönséges termodinamika* Scholar Könyvkiadó, Budapest, 2012.
- [209] T. Matolcsi and P. Ván. Can material time derivative be objective? *Physics Letters A*, 353:109–112, 2006.
- [210] Matolcsi, T. and Ván, P., Absolute time derivatives. *Journal of Mathematical Physics*, 48:053507-19, 2007.
- [211] Matsuki, K. and Takeuchi, K. Three-dimensional in situ stress determination by anelastic strain recovery of a rock core, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 30:1019-1022, 1993.
- [212] Matsuki, K. Anelastic strain recovery compliance of rocks and its application to in situ stress measurement *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 45:952-965, 2008.
- [213] G. A. Maugin. *The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors (An introduction)*. World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1999.
- [214] G. A. Maugin. Internal variables and dissipative structures. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 15:173–192, 1990.
- [215] G. A. Maugin. *Material inhomogeneities in elasticity*. Chapman and Hall, London-etc., 1993.
- [216] G. A. Maugin. On the universality of thermodynamics of forces driving singular sets. *Archive of Applied Mechanics*, 70:31–45, 2000.
- [217] G. A. Maugin. On the thermomechanics of continuous media with diffusion and/or weak nonlocality. *Archive of Applied Mechanics*, 75:723–738, 2006.
- [218] G. A. Maugin and R. Drouot. Internal variables and the thermodynamics of macromolecule solutions. *International Journal of Engineering Science*, 21(7):705–724, 1983.
- [219] G. A. Maugin and W. Muschik. Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 19:217–249, 1994.
- [220] G. A. Maugin and W. Muschik. Thermodynamics with internal variables. Part II. Applications. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 19:250–289, 1994.
- [221] J. C. Maxwell. On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 157:49–88, 1867.
- [222] J. Meixner. Macroscopic and microscopic reversibility. *Reports on Mathematical Physics*, 7:37–57, 1975.

- [223] D. Mi, Hai Yang Zhong, and D. M. Tong. There exist different proposals for relativistic temperature transformation: the whys and wherefores. *Modern Physics Letters A*, 24(1):73–80, 2009.
- [224] C. Møller. *The theory of relativity*. The international series of monographs in physics. Oxford University Press, Delhi-Bombay- Calcutta-Madras, 2nd edition, 1972.
- [225] M. J. Moran. On the second-law analysis and the failed promise of finite-time thermodynamics. *Energy*, 23(6):517–519, 1998.
- [226] A. Morro. A phase-field approach to non-isothermal transitions. *Mathematical and computer modelling*, 48(3-4):621–633, 2008.
- [227] I. Müller. On the entropy inequality. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 26(2):118–141, 1967.
- [228] I. Müller. Zur paradoxon der Wärmeleitungstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 198:329–344, 1967.
- [229] I. Müller. A thermodynamic theory of mixtures of fluids. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 28:1–39, 1968.
- [230] I. Müller. Toward relativistic thermodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 34(4):259–282, 1969.
- [231] I. Müller. On the frame dependence of stress and heat flux. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 45:241–250, 1972.
- [232] I. Müller. *Thermodynamics*. Pitman, Toronto, 1985.
- [233] I. Müller. *A History of Thermodynamics (The Doctrine of Energy and Entropy)*. Springer, 2007.
- [234] I. Müller and T. Ruggeri. *Rational Extended Thermodynamics*, volume 37 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer Verlag, New York-etc., 2nd edition, 1998.
- [235] I. Müller and W. Weiss. *Entropy and Energy (A universal competition)*. Springer, Berlin-etc..., 2005.
- [236] A. I. Murdoch. Objectivity in classical continuum physics: a rationale for discarding the 'principle of invariance under superposed rigid body motions' in favour of purely objective considerations. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 15:309–320, 2003.
- [237] A. I. Murdoch. On criticism of the nature of objectivity in classical continuum physics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:135–148, 2005.
- [238] W. Muschik. Internal variables in non-equilibrium thermodynamics. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 15:127–137, 1990.

- [239] W. Muschik. Objectivity and frame indifference, revisited. *Archive of Mechanics*, 50:541–547, 1998.
- [240] W. Muschik and H.H. v. Borzeszkowski. Comment on the article "Relativistic non-equilibrium thermodynamics revisited". *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 32:187–190, 2007.
- [241] W. Muschik and H. Ehrentraut. An amendment to the Second Law. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 21:175–192, 1996.
- [242] W. Muschik and L. Restuccia. Changing the observer and moving materials in continuum physics: Objectivity and frame-idifference. *Technische Mechanik*, 22(3):152–160, 2002.
- [243] W. Muschik, P. Ván, and C. Papenfuss. Variational principles in thermodynamics. *Technische Mechanik*, 20(2):105–112, 2000.
- [244] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [245] W. Noll. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*, 2:197–226, 1958/59.
- [246] W. Noll. Space-time structures in classical mechanics. In *The foundations of mechanics and thermodynamics (Selected papers by Walter Noll)*, pages 204–210. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. originally: pp28-34, Delaware Seminar in the Foudnations of Physics, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.
- [247] W. Noll. A frame free formulation of elasticity. *Journal of Elasticity*, 83:291–307, 2006.
- [248] W. Noll and B. Seguin. Basic concepts of thermomechanics. *Journal of Elasticity*, 101:791–858, 2010.
- [249] B. Nyíri. On the entropy current. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 16:179–186, 1991.
- [250] B. Nyíri. On the construction of potentials and variational principles in thermodynamics and physics. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 16:39–55, 1991.
- [251] L. Onsager. Reciprocal relations of irreversible processes I. *Physics Reviews*, 37:405–426, 1931.
- [252] L. Onsager. Reciprocal relations of irreversible processes II. *Physics Reviews*, 38:2265–2279, 1931.
- [253] L. Onsager and S. Machlup. Fluctuations and irreversible processes. *Physical Review*, 91(6):1505–1512, 1953.
- [254] H. Ott. Lorentz-Transformation der Wärme und der Temperatur. *Zeitschrift für Physik*, 175:70–104, 1963.

- [255] H. C. Öttinger. *Beyond equilibrium thermodynamics*. Wiley-Interscience, 2005.
- [256] H. C. Öttinger and M. Grmela. Dynamics and thermodynamics of complex fluids. II. Illustrations of a general formalism. *Physical Review E*, 56(6):6633–6655, 1997.
- [257] P. J. E. Peebles and D. T. Wilkinson. Comment on the anisotropy of the primeval fireball. *Physical Review*, 174(5):2168, 1968.
- [258] O. Penrose and P. C. Fife. Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetics of phase transitions. *Physica D*, 43:44–62, 1990.
- [259] J. Peralta-Ramos and E. Calzetta. Divergence-type nonlinear conformal hydrodynamics. *Physical Review D*, 80:126002, 2010.
- [260] M. Planck. Zur Dynamik bewegter Systeme. *Sitzungsberichte der königlich Preussische Akademie der Wissenschaften*, pages 542–570, 1907.
- [261] M. Planck. Zur Dynamik bewegter Systeme. *Annalen der Physik*, 331(6):1–34, 1908.
- [262] G. Policastro, D. T. Son, and A. O. Starinets. The shear viscosity of strongly coupled $n = 4$ supersymmetric Yang-Mills plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 87:081601, 2001.
- [263] I. Prigogine. *Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles*. Desoer, Liège, 1947.
- [264] J. W. S. Rayleigh. *The theory of sound*. Macmillan and Co., London, 1877.
- [265] L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*. John Wiley and Sons, Inc., New York-etc., 2nd edition, 1998.
- [266] M. Requardt. Thermodynamics meets special relativity - or what is real in physics? 2008. arXiv:0801.2639v1[gr-qc].
- [267] P. Romatschke. New developments in relativistic viscous hydrodynamics. *International Journal of Modern Physics E*, 19(1):1–53, 2010.
- [268] G. Ryskin. Misconception which led to the "material frame indifference" controversy. *Physical Review E*, 32(2):1239–1240, 1985.
- [269] A. Schriver. *Theory of linear and integer programming*. John Wiley and Sons, Chicester-etc., 1998.
- [270] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem(Zweite Mitteilung). *Annalen der Physik*, 79:489–527, 1926.
- [271] J. Serrin. *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, volume VIII of *Handbuch der Physik*, p125–263. Springer, 1959.
- [272] F. Sharipov. Onsager–Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at arbitrary rarefaction. I. general theory for single gas. *Physica A*, 203:437–456, 1994.

- [273] F. Sharipov. Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at arbitrary rarefaction. II. application of the theory for single gas. *Physica A*, 203:457–485, 1994.
- [274] F. Sharipov. Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at arbitrary rarefaction. III. theory and its application for gaseous mixtures. *Physica A*, 209:457–476, 1994.
- [275] F. Sharipov. Onsager-Casimir reciprocal relations based on the Boltzmann equation and gas-surface interaction: Single gas. *Physical Review E*, 73:036110, 2006.
- [276] F. Sharipov. The reciprocal relations between cross phenomena in boundless gaseous systems. *Physica A*, 389:3743–3760, 2010.
- [277] M. Šilhavý. *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. Springer Verlag, Berlin-etc., 1997.
- [278] M. P. Silverman. *More Than One Mystery*. Springer Verlag, New York-Berlin-etc., 1995.
- [279] C. G. Speziale. A review of material frame-indifference in mechanics. *Applied Mechanical Reviews*, 51(8):489–504, 1998.
- [280] J. M. Stewart. On transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. *Proceedings of Royal Society London A*, 357:59–75, 1977.
- [281] H. Struchtrup. *Macroscopic transport equations for rarefied gas flows*. Springer, Berlin-Heidelberg, 2005.
- [282] B. Svendsen and A. Bertram. On frame-indifference and form-invariance in constitutive theory. *Acta Mechanica*, 132:195–207, 1999.
- [283] Szarka Z., Asszonyi Cs. és Fülöp T. Anyagok mechanikai tulajdonságai az anyagtörvény alapján. In *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai*, szerk. Asszonyi Cs. *Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtár 6.*, 4. fejezet, 121–188. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [284] K. K. Tamma and X. Zhou. Macroscale and microscale thermal transport and thermo-mechanical interactions: some noteworthy perspectives. *Journal of Thermal Stresses*, 21:405–449, 1998.
- [285] D. Ter Haar and H. Wergeland. Thermodynamics and statistical physics in the special theory of relativity. *Physics Reports*, 1(2):31–54, 1971.
- [286] R. C. Tolman and P. C. Fine. On the irreversible production of entropy. *Reviews of Modern Physics*, 20:51–77, 1948.
- [287] V. Triani, C. Papenfuss, V. A. Cimmelli, and W. Muschik. Exploitation of the Second Law: Coleman-Noll and Liu procedure in comparison. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33:47–60, 2008.
- [288] C. Truesdell. *A first course in Rational Continuum Mechanics, V1 General concepts*. Academic Press, New York-San Francisco-London, 1977.

- [289] C. Truesdell. *Rational Thermodynamics*. Springer, New York, etc., 1984. 2nd enlarged edition.
- [290] C. Truesdell and S. Bharatha. *Classical Thermodynamics as a Theory of Heat Engines*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-etc., 1977.
- [291] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965. Handbuch der Physik, III/3.
- [292] C. Truesdell and R. Toupin. *The classical field theories*, in *Handbuch der Physik, Vol III/1*. Springer, Berlin, 1960.
- [293] K. Tsumura and T. Kunihiro. Stable first-order particle-frame relativistic hydrodynamics for dissipative systems. *Physics Letters B*, 668(5):425–428, 2008.
- [294] K. Tsumura and T. Kunihiro. First-principle derivation of stable first-order generic-frame relativistic dissipative hydrodynamic equations from kinetic theory by renormalization-group method. *Progress of Theoretical Physics*, 126(5):761–809, 2011.
- [295] K. Tsumura, T. Kunihiro, and K. Ohnishi. Derivation of covariant dissipative fluid dynamics in the renormalization-group method. *Physics Letters B*, 646:134–140, 2007.
- [296] D. Y. Tzou. Nonlocal behaviour in phonon transport. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54:475–481, 2011.
- [297] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics – the Guyer-Krumhansl and the Cahn-Hilliard equations. *Physics Letters A*, 290(1-2):88–92, 2001.
- [298] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 12(3):146–173, 2003.
- [299] P. Ván. Exploiting the Second Law in weakly nonlocal continuum physics. *Periodica Polytechnica, Ser. Mechanical Engineering*, 49(1):79–94, 2005.
- [300] P. Ván. The Ginzburg-Landau equation as a consequence of the Second Law, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17(2):165–169, 2005.
- [301] P. Ván. Unique additive information measures - Boltzmann-Gibbs-Shannon, Fisher and beyond. *Physica A*, 365:28–33, 2006.
- [302] Ván P. Objektív anyagfüggvények felé a reológiában. In *Mérnökgeológia és Kőzetmechanika*, szerk. Török Á. és Vásárhelyi B., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 4.*, 327–332. o. Műegyetemi Kiadó, 2007.
- [303] P. Ván. Internal energy in dissipative relativistic fluids. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(6):1161–1169, 2008.
- [304] P. Ván. Objective time derivatives in non-equilibrium thermodynamics. *Proceedings of Estonian Academy of Sciences*, 57(3):127, 2008.

- [305] Ván, P. Generic stability of dissipative non-relativistic and relativistic fluids. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, P02054, 2009.
- [306] Ván P. Weakly nonlocal non-equilibrium thermodynamics - variational principles and Second Law. In Ewald Quak and Tarmo Soomere, editors, *Applied Wave Mathematics (Selected Topics in Solids, Fluids, and Mathematical Methods)*, chapter III, pages 153–186. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009.
- [307] Ván P. A képlékenységi termodinamikája. In *Idő és térderiváltak anyagtörvényekben*, szerk. Fülöp T., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10.*, 15–50. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.
- [308] P. Ván. Kinetic equilibrium and relativistic thermodynamics. *EPJ WEB of Conferences*, 13:07004, 2011.
- [309] Ván P. és Asszonyi Cs. Az általános törvényszerűségek. In *Izotrop kontinuumok anyagtörvénye*, szerk. Asszonyi Cs., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 3.*, 2. fejezet, 25–87. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [310] Ván P. és Asszonyi Cs., Izotrop kontinuumok anyagtörvénye és speciális esetei. In *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai*, szerk. Asszonyi Cs. *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6.*, 1. fejezet, 13–50. o. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [311] P. Ván, A. Berezovski, and J. Engelbrecht. Internal variables and dynamic degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33(3):235–254, 2008.
- [312] P. Ván and T. Fülöp. Universality in Heat Conduction Theory – Weakly Nonlocal Thermodynamics. *Annalen der Physik (Berlin)*, 524(8):470–478, arXiv:1108.5589v3.
- [313] Ván P., Czél B., Fülöp T, Gróf Gy., and Verhás J. Heat conduction beyond the Fourier equation - theory and experiments. In *10th International Conference on Heat Engines and Environmental Protection, Proceedings*, pages 221–226. Budapest University of Technology and Economics - Department of Energy Engineering, 2011.
- [314] P. Ván and T. S. Bíró. Relativistic hydrodynamics - causality and stability. *The European Physical Journal - Special Topics*, 155:201–212, 2008.
- [315] P. Ván and T.S. Bíró. First order and generic stable relativistic dissipative hydrodynamics. *Physics Letters B*, 709(1-2):106-110, 2012.
- [316] P. Ván and T. Fülöp. Stability of stationary solutions of the Schrödinger-Langevin equation. *Physics Letters A*, 323(5-6):374–381, 2004.
- [317] P. Ván and T. Fülöp. Weakly nonlocal fluid mechanics - the Schrödinger equation. *Proceedings of the Royal Society, London A*, 462(2066):541–557, 2006.
- [318] P. Ván and W. Muschik. Structure of variational principles in nonequilibrium thermodynamics. *Physical Review E*, 52(4):3584–3590, 1995.

- [319] P. Ván and Szarka Z. Rock rheology - time dependence of dilation and stress around a tunnel. In A. Van Cotthem, R. Charlier, J-F Thimus, and J-P. Tshibangu, editors, *Eurock 2006, Multiphysics Coupling and Long term behaviour in rock mechanics*, pages 357–363, London-Leiden/ etc., 2006. Taylor and Francis. Proceedings of the International Symposium of the International Society for Rock Mechanics, Eurock 2006, 9-12 May 2006, Liège, Belgium.
- [320] J. D. Van der Waals. Thermodynamische theorie der kapillarität unter voraussetzung stetiger dichteänderung. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 13:657–725, 1894.
- [321] N. G. van Kampen. Relativistic thermodynamics of moving systems. *The Physical Review*, 173:295–301, 1968.
- [322] J. Verhás. On the entropy current. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 8:201–206, 1983.
- [323] Verhás J., *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [324] J. Verhás. An application of Gyarmati’s wave approach. *Acta Physica Hungarica*, 66(1-4):95–97, 1989.
- [325] J. Verhás. *Thermodynamics and Rheology*. Akadémiai Kiadó and Kluwer Academic Publisher, Budapest, 1997.
- [326] J. Verhás. Non-equilibrium thermodynamics and the dynamics of particles. In O. Gues G. Iooss and A. Nouri, editors, *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, pages 138–146, Boca Raton-London-New York-Washington, D. C., 2000. Chapman and Hall/CRC.
- [327] E. Verlinde. On the origin of gravity and the laws of Newton, *Journal of High Energy Physics* 2011(4):1-29, 2011.
- [328] M. P. Vernotte. Le paradoxes de la théorie continue et l’équation de la chaleur. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*, 246:3154–55, 1958.
- [329] J. von Neuman. Discussion of a maximum principle. In A. H. Taub, editor, *Collected Works*, volume VI, pages 89–95, New York and Oxford, 1961. Pergamon Press.
- [330] J. A. Walker. *Dynamical Systems and Evolution Equations /Theory and Applications/*. Plenum Press, New York and London, 1980.
- [331] C. C. Wang. A new representation theorem for isotropic functions: An answer to professor G. F. Smith’s criticism of my papers on representations of isotropic functions, Part 1. Scalar valued isotropic functions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 36(3):166–197, 1970.
- [332] C. C. Wang. A new representation theorem for isotropic functions: An answer to professor G. F. Smith’s criticism of my papers on representations of isotropic functions, Part 2. Vector valued isotropic functions, and skew-symmetric

- tensor-valued isotropic functions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 36(3):198–223, 1970.
- [333] S. Weinberg. Testing quantum mechanics. *Annals of Physics*, 194:336–386, 1989.
- [334] H. Weyl. *Raum-Zeit-Matterie*. Julius Springer, Berlin, 1918.
- [335] H.D. Weymann. Finite speed of propagation in heat conduction, diffusion, and viscous shear motion. *American Journal of Physics*, 35:488–, 1967.
- [336] Xu Cai Huan-Zhong Huang Xin-Nian Wang Zhi-Yuan Zhu Yu-Gang Ma, En-Ke Wang, editor. *Quark Matter 2006 - The 19th International Conference on ultra-relativistic nucleus-nucleus collisions (Shanghai, China, 14-20 November 2006)*. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2006. Volume 34.
- [337] C. K. Yuen. Lorentz transformation of thermodynamic quantities. *American Journal of Physics*, 38(2):246–252, 1970.
- [338] W. Yourgrau and S. Mandelstam. *Variational principles in dynamics and quantum theory*. Pitman, New York-Toronto-London, 2nd edition, 1999.
- [339] Z. M. Zhang. *Nano/microscale heat transfer*. McGrawHill, New York, etc..., 2007.
- [340] R. Zygadlo. Thermodynamical quantities and relativity. *Acta Physica Polonica*, 41(5):1073–1081, 2010.